Самарская Лука: проблемы региональной и глобальной экологии. 2021. – Т. 30. – № 3. – С. 78-85.

УДК 574.34+517.91 **DOI 10.24412/2073-1035-2021-10414**

АДОЛЬФ КЕТЛЕ И МОДЕЛИ ЛОГИСТИЧЕСКОГО РОСТА

© 2021 Г.С. Розенберг

Институт экологии Волжского бассейна РАН – филиал
Самарского федерального исследовательского центра РАН, г. Тольятти (Россия)

Поступила 30.02.2021

Аннотация. Кратко обсуждаются некоторые биографические детали жизни одного из основоположников математической статистики, бельгийского ученого А. Кетле. Рассматриваются некоторые расширения модели логистического роста.

Ключевые слова: теория вероятностей, статистика, средний человек, динамика популяций, социология, астрономия.

О моделях логистического роста я уже писал и на страницах «Самарской Луки», и в других изданиях (Розенберг, 2004, 2006; Пирл, Рид, 2006). Однако юбилей (**225 лет со дня рождения** [Розенберг, 2021, с. 5]) одного из авторов модели – Адольфа Кетле – хороший повод еще раз вернуться к этой основополагающей модели количественной экологии (динамики популяций).

Адольф Кетле (Ламбер Адольф Жак Кетле; Lambert-Adolph-Jacques Quetelet; 22 февраля 1796 –17 февраля 1874) – бельгийский математик, астроном, метеоролог, социолог; один из родоначальников научной статистики, иностранный член ИСПбАН (с 1847 г.)

Адольф Кетле (из всех данных ему имен он предпочитал именно это) родился в Генте, который в то время был частью первой Французской Республики. Он был сыном француза Франсуа-Огюстена-Жака-Анри Кетле и фламандки (Валлонский Брабант) Анны Франсуазы Ван-дер-Вельде и пятым ребенком в большой семье из девяти детей (правда, не все из них дожили до взрослого возраста; Mailly, 1875). Франсуа умер, когда Адольфу было всего семь лет. Смерть отца, хотя и не помешала ему блестяще закончить Гентский лицей (он ещё в раннем детстве обнаружил блестящие способности к математике), поставила его семью в финансовые затруднения. Чтобы помочь родным, Адольф в 1813 г. оставил лицей и немедленно приступил к преподавательской работе в нем же (с 1814 г., после падения Наполеона, – колледж Гента), в возрасте 17 лет.

Когда в 1817 г. был основан Гентский университет, он воспользовался возможностью поступить на научный факультет нового учебного заведения и два года спустя ему была присуждена степень доктора наук за диссертацию на латыни по геометрии («De quibusdam locis geometryis, necnon de curva focal – О некоторых новых свойствах фокусного расстояния и некоторых других кривых»), благодаря которой его имя стало ассоциироваться с концепцией фокальной кривой. Вскоре после этого он был назначен профессором и избран (в 1820 г.) членом Академии города Брюсселя (в последствии, Бельгийской академии наук).

Розенберг Геннадий Самуилович, глав. науч. сотр., докт. биол. наук, проф., чл.-корр. РАН, genarozenberg@yandex.ru

Интересная деталь. Еще в лицее Адольф подружился с Ж. Данделеном[1] (Germinal Pierre Dandelin; 1794–1847), который был на два года старше его. Оба интересовались математикой, литературой и музыкой. Затем Данделен уехал учиться в Париж, сражался на стороне Наполеона, но вернулся в Бельгию после поражения Наполеона при Ватерлоо и возобновил дружбу с Кетле, который преподавал в Гентском колледже. Два друга сочинили либретто для оперы, а после её успешного исполнения написали еще несколько драм (O'Connor, Robertson, 2012).

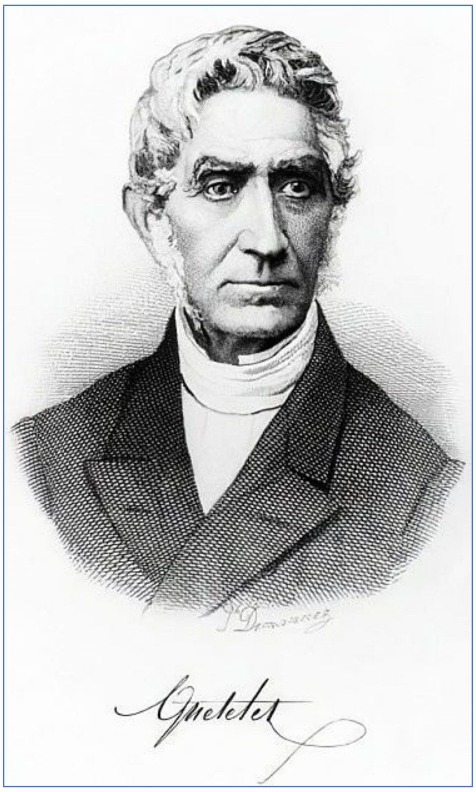
Однако не все время в Гентском колледже Кетле посвящал литературным занятиям, поскольку он находился под влиянием профессора астрономии и высшей математики Ж. Гарнье (Jean Guillaume Garnier; 1766–1840). Именно Гарнье остановил растущее пристрастие Кетле к искусству и заставил его увлечься более глубокими исследованиями математики.

Кетле всегда испытывал огромное желание участвовать в развитии Брюсселя, города, в котором он должен был жить до конца своих дней. После получения докторской степени по математике, он обосновал перед государственными чиновниками и частными спонсорами необходимость строительства астрономической обсерватории в Брюсселе; Кетле был настолько убедителен, что в 1923 г. началось строительство, а его отправили в Париж, чтобы он изучал практику астрономии и закупал оборудование для обсерватории. Его пребывание во французской столице оказалось весьма полезным. Кроме успешных дел, связанных с осуществлением своего проекта, он познакомился с выдающимися математиками Франции (Лакруа, Пуассоном, Фурье, Лапласом), которые способствовали росту его убежденности в важной роли теории вероятностей.

В 1824 г. он женился на Сесиль Курте (Cécile-Virginie Curtet), дочери французского врача; у них был сын Эрнест и дочь. Эрнест стал опытным астрономом и в конечном итоге взял на себя роль своего отца в качестве директора Брюссельской обсерватории. Кетле и его жена любили музыку и развлекали гостей дома музицированием после традиционных субботних и воскресных обедов.

В это же время он занимался строительством обсерватории (завершено в 1828 г.), читал лекции в музее науки и литературы (Atheneum) и в Бельгийской военной школе. Тогда же Кетле занялся прикладной статистикой, анализировал законы рождаемости и смертности в Брюсселе, обосновал необходимость проведения полной переписи населения (в 1828 г. он стал президентом Центральной статистической комиссии Бельгии и принял активное участие в переписи 1846 г.). В 1834 г. он возглавил построенную им обсерваторию.

В том же 1834 г. он был избран бессменным секретарем Брюссельской академии наук и литературы, которая в 1845 г. стала Королевской академией Бельгии; он занимал эту должность до самой смерти. В 1825 г. он стал корреспондентом Королевского института Нидерландов, в 1827 г. – его членом, с 1841 по 1851 гг. он был внештатным сотрудником Института, а когда тот стал Королевской Нидерландской академией искусств и наук, – Кетле стал её иностранным членом. В 1847 г. стал иностранным членом Императорской СПбАН, в 1850 г. был избран иностранным членом Шведской королевской академии наук. Кетле был почетным и действительным членом около ста ученых учреждений и обществ и имел бесчисленное количество орденов чуть ли не всех цивилизованных государств мира (André, 1997; Райхесберг, 2015).



Портрет Адольфа Кетле. 1875 г. Бельгийский гравер Ж.-А. Деманнез (Joseph-Arnold Demannez; 1825-1902). Гравировка на стали. Изображение из Библиотеки Конгресса США (Вашингтон), отдел эстампов и фотографий (Annuaire de l'Académie royale de Belgique, 1875, vol. 41, p. 108)

[1] Жерминаль Данделен, бельгийский математик, механик; член Бельгийской академии наук (1822).

Кетле также основал несколько статистических журналов и обществ и был особенно заинтересован в налаживании международного сотрудничества между статистиками (André, 1997). Он поощрял создание статистической секции Британской ассоциации содействия развитию науки, которая позже стала Королевским статистическим обществом, а он – первым её членом. В 1853 г. он председательствовал на Международной морской конференции и Первом международном статистическом конгрессе (в организации которого принял самое активное участие). Он был одним из основателей первого *Société des douze* (научный и литературный клуб «Общество двенадцати»).

В 1855 г. Кетле перенес апоплексический удар (инсульт), который заметно уменьшил, но не прекратил его научную деятельность. В течение последующих лет он посвятил себя, в основном, переизданию или выпуску дополненных изданий своих ранних работ. Он умер в Брюсселе 17 февраля 1874 г.

Вклад в развитие статистики

В 1828 г. он опубликовал работу «Instruction populaire sur le calcul des probabilités. – Популярные инструкции по исчислению вероятностей» (титульный лист книги украшает портрет Лапласа и лозунг по латыни: «Mundum numeri regunt – Мир управляется числами»). Эта книга является, как Кетле сам отмечает в предисловии, своего рода резюме лекций по теории вероятностей, читанных им в течение нескольких лет в Atheneum. С того времени, когда он под руководством Лапласа ближе познакомился с основными принципами теории вероятностей, он не переставал указывать на великое и всеобъемлющее значение этой теории, не переставал увещевать образованную публику посвятить ей несколько больше внимания (Райхесберг, 1894). Приведу несколько цитат из этих лекций.

1. Чем более продвинутыми становились науки, тем больше они склонны входить в сферу математики, которая является своего рода центром, к которому они сходятся. Мы можем судить о совершенстве, к которому пришла наука, по более или менее большой легкости, с которой к ней можно подходить расчетами.
2. Мне кажется, что теория вероятностей должна служить основой для изучения всех наук, и особенно наук о наблюдении.
3. Поскольку абсолютная уверенность невозможна, и мы можем говорить только о вероятности выполнения научных ожиданий, изучение этой теории должно быть частью образования самого человека.
4. Случайность, это таинственное, часто употребляемое слово, следует рассматривать лишь как прикрытие нашего невежества; это фантом, который осуществляет абсолютную империю над обычным разумом, привык рассматривать события только как изолированные, но сводится к нулю перед философом, чей глаз охватывает длинную серию событий и чье проникновение не сбивается с пути вариациями, которые исчезают, когда он дает себе достаточную перспективу, чтобы постичь законы природы.

После первых же опытов в индуктивной разработке статистического материала, в работах, относящихся к 1820-м годам, Кетле пришел к следующим общим положениям, проводимым во всех дальнейших его исследованиях.

1. Вся масса фактов, собранных и собираемых статистикой о народонаселении, есть временное и пространственное изменение одного из свойств или элементов того типа человека, который мы создаем себе фиктивно, но который в то же время есть настоящий тип, о сохранении которого заботится природа; этот тип, слагаемый из разрозненных черт, есть *средний человек* (homme moyen).
2. Тип человека, олицетворяющий некое социальное тело, сохраняется в силу постоянных или только периодически действующих причин, в отыскании которых, равно как и в построении этого типа, заключается главная задача *социальной физики*[2]; все частные изменения этого типа – по народам, по пространству и времени – являются следствиями сложных причин, как постоянных, периодических, так и случайных; всякое изменение совершается непременно *по известным законам* (*выделено мной. – Г.Р.*) которым подчинены действия постоянных и периодических причин в их разнообразных сочетаниях.
3. Все наблюдаемые нами в статистике свойства или действия – только слабые приближения к тому, что составляет атрибут типа; каждая серия, каждый ряд наблюдений есть только ряд измерений величины, точно неопределимой; чем больше таких измерений, тем более мы имеем надежды достигнуть познания истинных свойств типа, тем ближе подходит средняя величина к единице, то есть к действительности, достоверности (Кетле, 2020; [https://ru.wikipedia.org/wiki/Кетле,_Адольф]).

Значение Кетле в истории общественных наук вообще заключается в том, что, поставив себе за-

[2] Социальная физика *(physique sociale)*, термин, применявшийся для обозначения обществоведения в XVII в. В XIX в. его использовал французский философ О. Конт (Isidore Marie Auguste François Xavier Comte; 1798–1857), который позже назвал эту науку *социологией*.

дачей применить к изучению общественных явлений приемы точного наследования, которыми пользуются естественные науки, он первый показал, что человеческие деяния, подобно явлениям физического мира, подчинены известной закономерности. В главном сочинении Кетле «О человеке и развитии его способностей – Sur l'homme et le développement de ses facultés, ou Essai de physique sociale» (Quetelet, 1835) предмет исследования определяется так: следует изучать причины естественные и пертурбационные, которые влияют на развитие человека; необходимо измерить действие этих причин и те изменения, какие они производят; необходимо через констатацию фактов и явлений, касающиеся развития человека, познать законы, которые связывают явления между собой. Вся социальная физика строится на учениях о среднем человеке и средней величине, о тождественности законов физического и духовного миров, на определении этих законов и, наконец, на приложении теории вероятностей к обобщениям из наблюдений.

«Предтеча» логистической кривой

Среди всего многообразия статистических результатов, полученных Кетле, меня заинтересовал следующий. В работе «О человеке и развитии его способностей» читаем: «Благосостояние или бедность населения не являются результатом беспорядочного эффекта непредсказуемой смертности, а есть результат действия законов, которые могут быть описаны общественными науками и служат основой для прогнозов. Эти законы, безусловно, навязываются обществу, но люди, зная их, могут влиять на них своими действиями и сделать социальное благополучие своей целью. <…> Эта цель ставится под угрозу, когда существует дисбаланс между ростом населения в целом и ростом средств к существованию, поэтому это ключевой вопрос, который необходимо прояснить при построении науки о народонаселении. <…> Программа четко построена. [Рост населения] более или менее быстрый, и происходит либо из-за превышения рождаемости над смертностью, либо из-за иммиграции. В целом, он объявляет о состоянии благосостояния и средств к существованию, превосходящих потребности нынешнего населения. *Если мы приближаемся к этому пределу или превышаем его, вскоре состояние роста останавливается и уступает место противоположному состоянию*. Поэтому интересно исследовать, сколько населения в разных странах, каковы средства к существованию и степень прироста этого населения, и *определить предел, которого они могут достичь без опасности* (*выделено мной. – Г.Р.*). Тогда возникает вопрос о том, как составить население, если их составные элементы распределены выгодно и более или менее эффективно способствуют благополучию в целом» (Quetelet, 1835, p. 37-38, 247-248). Более того, Кетле предположил, что долгосрочный рост населения встречает сопротивление, пропорциональное квадрату скорости роста (Quetelet, 1835, p. 277; Bacaёr, 2011).

В общепринятых обозначениях, эти предположения Кетле записываются в следующем виде:

$$\frac{dN}{dt} = nN - mN^2 ,$$

где N – численность населения, n и m – некоторые коэффициенты.

Именно эта идея вдохновила другого бельгийского математика П.-Ф. Ферхюльста[3] на исследование, в котором он заявил: «Рост населения неизбежно имеет предел, хотя бы в размере территории, необходимой для проживания этого населения. <…> Таким образом, все формулы, с помощью которых пытаются представить закон численности, должны удовлетворять условию допуска максимума, который достигается только в бесконечно далекую эпоху. Этот максимум будет численностью населения, когда оно станет стационарным» (Verhulst, 1838, p. 114-115; см. перевод его статьи в этом номере журнала). Чуть позже (Verhulst, 1845, p. 8-9) он назвал эту кривую «логистической» (по-видимому, в противовес «логарифмической» кривой, с которой он её сравнивал). Эта работа Ферхюльста, фактически, прошла незамеченной и её забыли.

Логистическая кривая после Ферхюльста и до работы (Pearl, Reed, 1920) переоткрывалась несколько раз (Lloyd, 1967) и даже после многочисленных публикаций Р. Пирла кривую продолжали «открывать» (Lotka, 1924; Kingsland, 1982; Salisbury, 2011; Smith, Keyfitz, 2013; Дроздюк, 2019).

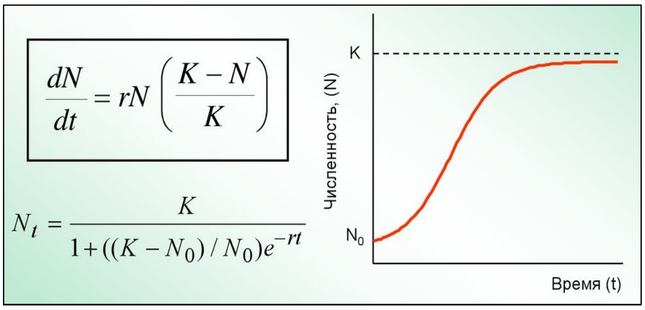
Собственно, о логистической кривой

Исходные предположения для вывода логистического уравнения популяционной динамики (см. схему ниже) выглядят следующим образом:

- скорость размножения популяции пропорциональна её текущей численности, при прочих равных условиях;
- скорость размножения популяции пропорциональна количеству доступных ресурсов, при прочих равных условиях. Таким образом, вто-

[3] П.-Ф. Ферхюльст (Pierre-François Verchulst; 1804–1849) был талантливым учеником Кетле; в возрасте 21 года он получил докторскую степень по математике и в 1835 г. стал профессором математики в недавно основанном Свободном университете Брюсселя (Bacaёr, 2011). Кетле очень высоко ценил Ферхюльста, о чем подробно сказано в некрологе (Quetelet, 1850).

рой член уравнения (rN^2/K) отражает конкуренцию за ресурсы, которая ограничивает рост популяции.



Или, переписывая уравнение (раскрывая скобки), получаем:

$$\frac{dN}{dt} = rN - \frac{r}{K}N^2 , \qquad (1)$$

Здесь N – численность популяции, r – скорость роста популяции (мальтузианский параметр), K – предельная численность популяции, которая может быть достигнута при скорости роста r ($\lim N(t) = K$).

«Поведение» (динамика) логистической кривой следующим образом зависит от параметров уравнения:

$N > K$ $\quad dN/dt < 0$,
$0 < N < K$ $\quad dN/dt > 0$,
$N = K$ $\quad dN/dt = 0$,
$N = 0$ $\quad dN/dt = 0$.

Фазовый портрет (совокупность всех траекторий системы [модели (1)], изображенных в пространстве фазовых переменных), представленный на рис. 1, демонстрирует нам две точки равновесия: неустойчивую (0) и устойчивую (K); это подтверждает и рис. 2.

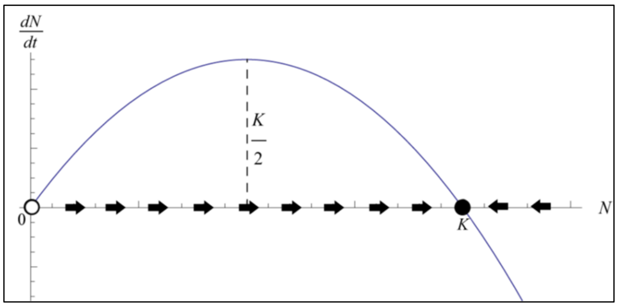


Рис. 1. Фазовый портрет модели логистического роста.

Существует множество модификаций уравнения (1). Одна из самых простых – модель, включающая новый параметр $\theta > 0$, который обеспечивает дополнительную универсальность и гибкость с точки зрения изменения темпа роста на единицу популяции (r) по отношению к плотности населения N:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left[1 - \left(\frac{N}{K}\right)^{\theta}\right] . \qquad (2)$$

Фазовый портрет уравнения (2) представлен на рис. 3; при $\theta = 1$ наблюдается полное совпадение с рис. 1.

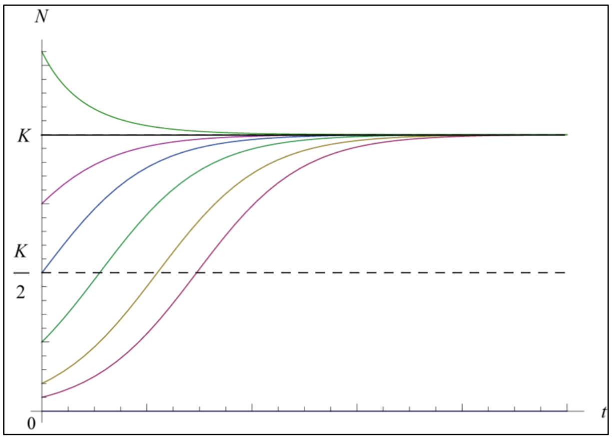


Рис. 2. Динамика численности популяции по модели логистического роста.

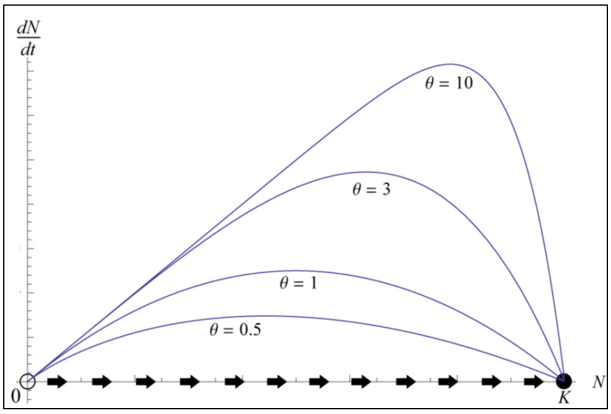


Рис. 3. Фазовый портрет модели (2).

При таком изменении исходной модели (1), можно получить более адекватный результаты, учитывая, что она задает важную зависимость параметра r от плотности. Таким образом, модель обеспечивает дополнительную сложность по сравнению с классической логистической моделью с точки зрения формы кривой роста.

Еще одна модификация уравнения (1) позволяет учесть, так называемый, *эффект Олли* (Allee effect [Gruntfest et al., 1997; Stephens et al., 1999; Courchamp et al., 2008; Розенберг, 2020]). Эффект Олли – это явление, характеризующееся положительной корреляцией (на определенном этапе развития) между размером или плотностью популяции и средней индивидуальной приспособленностью популяции или вида (часто измеряемой как скорость роста популяции на особь [Courchamp et al., 2008]). Этот эффект был описан в 1930-х годах зоологом и пионером американской экологии Уордом Олли (Warder Clyde Allee; 1885–1955), хотя идея «взаимопомощи» в социо-эколого-экономических системах возникла очень давно (ранее [Розенберг, 2020, с. 77] я приводил весьма удачную цитату из Экклезиаста [гл. 4: 9-12]).

Несколько преобразуем уравнение (1):

$$\frac{dN}{dt} = -rN\left(1-\frac{N}{T}\right)\left(1-\frac{N}{K}\right), \qquad (3)$$

где $r > 0$, $0 < 0 < T < K$; смена знака перед первым сомножителем меняет устойчивость точек равновесия уравнения (1) – теперь 0 – устойчивая, а K – неустойчивая точки равновесия для (1). Пороговый параметр T в уравнении (3) вновь «вмешивается» в устойчивость точек равновесия: 0 – устойчивая, T – неустойчивая, а K – опять устойчивая точки равновесия. Фазовый портрет уравнения (3) представлен на рис. 4; на рис. 5 приведена динамика численности популяции с учетом эффекта Олли.

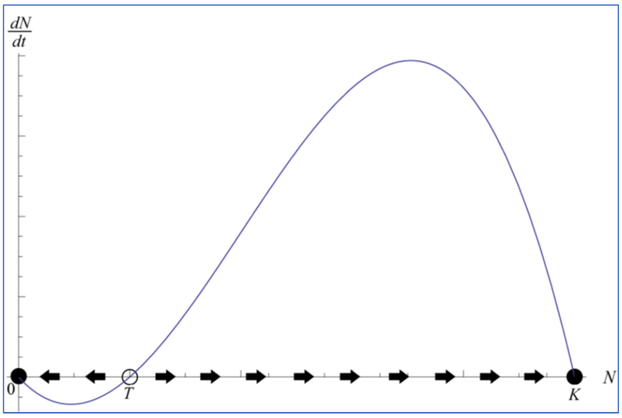


Рис. 4. Фазовый портрет модели (3).

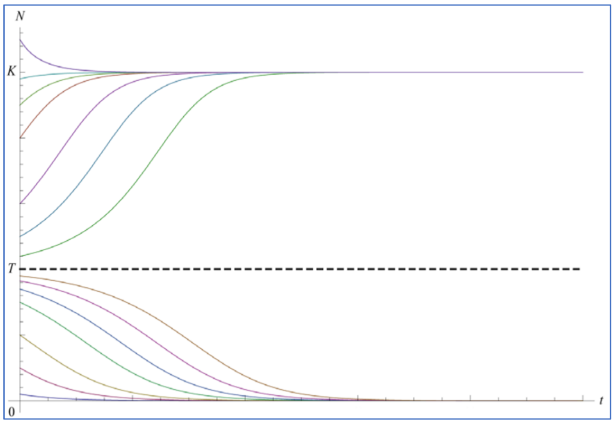


Рис. 5. Динамика численности популяции по модели (3).

Таким образом, поведение уравнения (3) отражает эффект Олли, поскольку численность особей ниже порогового значения T имеет тенденцию к уменьшению (популяция вымирает), а численность особей выше порогового уровня демонстрирует стремление к своей несущей способности в окружающей среде K. Специфический тип называется *сильным эффектом Олли*, потому что популяции ниже порога T вымирают; в случаях *слабого эффекта Олли* популяции ниже порогового значения просто уменьшают темпы роста. Замечу, что правая часть уравнения (3) – это полином 3-й степени; Ферхюльст также использовал его (Verhulst, 1835, s. 116) при оценке верхнего предела численности населения.

Модель (3) в самом общем случае может быть представлена следующим образом:

$$\frac{dN}{dt} = rN\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{N}{K_i}\right),$$

где $K_1 < K_2 < \ldots < K_n$ – n точек равновесия, причем, $N^* = K_{2i}$ – устойчивы, а $N^* = K_{2i+1}$ – неустойчивы.

Модель взаимодействия двух популяций – модель конкуренции Вольтерра, Лотки, Гаузе (Murray, 2002; Базыкин, 2003; Вольтерра, 2004; Pastor, 2008 и др.) – также «опирается» на модель логистического роста:

$$\frac{N_1}{dt} = r_1N_1\left[1-\frac{(N_1+\alpha N_2)}{K_1}\right],$$

$$\frac{N_2}{dt} = r_2N_2\left[1-\frac{(N_2+\beta N_1)}{K_2}\right],$$

где N_1 и N_2 – численности двух конкурирующих популяций, r_1 и r_2 – их скорости роста, K_1 и K_2 – пределы численности при независимом росте, α и β – коэффициенты конкуренции.

Наконец, несколько слов о дискретном аналоге модели логистического роста. Дискретные модели применяются для описания развития популяций, численность которых N_t в момент времени t зависит от численности в k предшествующих моментов времени:

$$N_t = f(N_{t-1}, N_{t-2}, \ldots N_{t-k}).$$

В простейшем случае, численность каждого следующего поколения N_{t+1} зависит лишь от численности предыдущего поколения N_t, и говорят, что поколения в популяции не перекрываются (это справедливо для целого ряда видов насекомых и микроорганизмов).

В непрерывном логистическом уравнении (1) заменим dN/dt на $\Delta N/\Delta t$ ($\Delta N = N_{t+1} - N_t$, $\Delta t = 1$); тогда,

$$N_{t+1} = N_t\left[1 + r\left(1-\frac{N_t}{K}\right)\right].$$

Однако, выражение в квадратных скобках может быть отрицательным (при

$$N_t > \frac{K(1+r)}{r});$$

это ведет к отрицательной численности популяции, что невозможно. Чтобы исправить положение, в качестве $f(N_t)$ следует взять функцию, асимптотически стремящуюся к нулю при $N_t \to \infty$; таким свойством обладает выражение

$$exp^{r\left(1-\frac{N_t}{K}\right)} .$$

Итак, получаем дискретный аналог логистического уравнения:

$$N_{t+1} = N_t \cdot exp^{r\left(1-\frac{N_t}{K}\right)} .$$

Интересный факт: при различных соотношения параметров r и K, пользуясь этой моделью, можно получать различные режимы динамики численности популяции (можно даже говорить о квазиимитационном моделировании):

- $0 < r < 1$ – монотонное приближение численности к стационарной;
- $1 < r < 2$ – затухающие колебания;
- $2 < r < 2{,}526$ – двухточечные циклы;
- $2{,}526 < r < 3{,}102$ – циклы большей длины;
- $r > 3{,}102$ – хаотический режим.

Этот краткий обзор описания популяционной динамики через логистические уравнения лишний раз свидетельствует о смелом и дальновидном предвидении Адольфа Кетле, который заложил фундамент экологической статистики.

«Тотчас же после его смерти его друзьями и почитателями был поднят вопрос о возведении памятника великому бельгийскому мыслителю, которого весь мир считал своим. Мысль эта была встречена повсюду с большим энтузиазмом. В сравнительно очень короткое время нужная сумма была собрана, и выполнение плана было поручено известному скульптору Фрайкину (*Ш.О. Фрекен. – Г.Р.*). Местом для памятника была избрана обширная площадь перед зданием Брюссельской академии наук. 11 мая 1880 года состоялась церемония открытия памятника Адольфу Кетле. Присутствовали все ученые общества Брюсселя и множество делегатов различных ученых учреждений провинции и заграницы. Кетле представлен сидящим в просторном кресле. Пальцы левой руки простерты над стоящим возле него глобусом, правая рука спускается над ручкой кресла. Просторное платье широкими складками облегает его высокую, стройную фигуру. Голова приподнята несколько вверх, глубокий взор больших, выразительных глаз устремился вдаль, как бы стараясь проникнуть в тайны вселенной» (Райхесберг, 1894, с. 164).

Памятник Адольфу Кетле в Брюсселе. (Фрекен, Шарль Огюст [Fraikin Charles Auguste; 1817–1893] – бельгийский скульптор, представитель неоклассицизма

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Список русскоязычной литературы

1. **Базыкин А.Д.** Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. М.; Ижевск: Институт компьютерных технологий. 2003. 368 с.
2. **Вольтерра В.** Математическая теория борьбы за существование. М.; Ижевск: Институт компьютерных технологий. 2004. 288 с.
3. **Дроздюк А.** Логистическая кривая. Торонто: Choven, 2019. 271 с.
4. **Кетле А.** Социальная система и законы, ею управляющие. М.: URSS. 2020. 314 с. (Сер.: Из наследия мировой социологии).
5. **Пирл Р., Рид Л.** Дополнительный комментарий по математической теории роста населения / Пер. с англ. А.Г. Розенберг, Г.С. Розенберга // Самарская Лука: Бюл. 2006. № 18. С. 194-198.
6. **Райхесберг Н.М.** Адольф Кетле. Его жизнь и научная деятельность. М.: Директ-Медиа, 2015. 165 с. (Сер.: Жизнь замечательных людей; первое издание – 1894). [file:///C:/Users/chica/Downloads/168942.pdf]. (М.: Elibron Classics, 2000, 98 с.).
7. **Розенберг Г.С.** Лики экологии. Тольятти: Самар. НЦ РАН, 2004. 224 с. (свободный доступ: https://sites.google.com/site/tltrbo/home/osnovnye-izdania).

8. **Розенберг Г.С.** К истории модели логистического роста // Самарская Лука: Бюл. 2006. № 18. С. 188-193.
9. **Розенберг Г.С.** Уорд Клайд Олли и принцип агрегации особей // Самарская Лука: проблемы региональной и глобальной экологии. 2020. Т. 29, № 3. С. 77-88.
10. **Розенберг Г.С.** 2021: Из истории экологии. Тольятти: Анна, 2021. 32 с.
11. **André R.** Adolphe Quetelet, académicien. Actualité et universalité de la pensée scientifique d'Adolphe Quetelet, Brussels, 1996 // Académie Royale de Belgique. Classe des Sciences. Mémoires. Collection in-8o. 3e Série. Acad. Roy. Belgique (Brussels). 1997. V. 13. P. 23-45.
12. **Bacaёr N.** Verhulst and the logistic equation // A Short History of Mathematical Population Dynamics. London: Springer, 2011. P. 35-39.
13. **Courchamp F., Berec J., Gascoigne J.** Allee Effects in Ecology and Conservation. N. Y.: Oxford Univ. Press, 2008. 256 p.
14. **Gruntfest Y., Arditi R., Dombrovsky Y.** A frag-mented population in a varying environment // J. Theoret. Biol. 1997. V. 185. P. 539-547.
15. **Kingsland S.** The Refractory model: The logistic curve and the history of population ecology // The Quarterly Review of Biology. 1982. V. 57, No. 1. P. 29-52.
16. **Lloyd P.J.** American, German and British antecedents to Pearl and Reed's logistic curve // Population Studies. 1967. V. 21, No. 2. C. 99-108.
17. **Lotka A.J.** Elements of Physical Biology. Baltimore: Williams and Wilkins, 1924. 460 p.
18. **Mailly E.** Essai sur la vie et les ouvrages de Quetelet // Annuaire de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. 1875. V. 41. P. 109-297.
19. **Murray D.D.** Mathematical Biology. N. Y.: Springer, 2002. 551 p.
20. **O'Connor J.J., Robertson E.F.** Germinal Pierre Dandelin // MacTutor. 2012. [https://mathshistory.st-andrews. ac.uk/Biographies/Dandelin/].
21. **Pastor J.** Mathematical Ecology of Populations and Ecosystems. Ecosystems. Oxford: Wiley-Blackwell, 2008. 319 p.
22. **Pearl R., Reed L.J.** On the rate of growth of the population of the United States since 1790 and its mathematical representation // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. 1920. V. 6, No. 6. P. 275-288.
23. **Quetelet A.** Sur l'homme et le développement de ses facultés ou essai de physique sociale. Paris: Bachelier, Imprimeur-Libraire (Quai des augustins, 55), 1835. 327 p. [https://archive.org/details/surlhommeetled00quet/page/n345/mode/2up].
24. **Salisbury A.** Mathematical Models in Population Dynamics (A Thesis). Sarasota: New College of Florida, 2011. 104 p. [https://core.ac.uk/download/pdf/141995076.pdf].
25. **Smith D.P., Keyfitz N.** Mathematical Demography: Selected Papers. Berlin et al.: Springer-Verlag, 2013. 514 p.
26. **Stephens P.A., Sutherland W.J., Freckleton R.P.** What is the Allee effect? // Oikos. 1999. V. 87, No. 1. P. 185-190.
27. **Verhulst P.F.** Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement // Correspondance mathématique et physique. 1838. V. 10. P. 113-121. (Verhulst P.-F. A note on the law of population growth // Smith D.P., Keyfitz N. Mathematical Demography: Selected Papers. Berlin et al.: Springer-Verlag, 2013. p. 279-283.).
28. **Verhulst P.-F.** Recherches Mathematiques sur la Loi de l'Accroissement de la Population // Nouveaux Memoires de l'Academie Royale dês Sciences et de Belles Lettres de Bruxelles. 1845. V. 18, Art. 1. P. 1-45. (Mathematical Researches into the Law of Population Growth Increase).

Общий список литературы / Reference List

1. **Bazykin A.D.** Nonlinear Dynamics of Interacting Populations. Moscow; Izhevsk: Institute of Computer Technologies. 2003. 368 p. (In Russian).
2. **Volterra V.** Mathematical Theory of the Struggle for Existence. Moscow; Izhevsk: Institute of Computer Technologies. 2004. 288 p. (In Russian).
3. **Drozdyuk A.** Logistic Curve. Toronto: Choven, 2019. 271 p. (In Russian).
4. **Quetelet A.** Social System and Laws Governing It. Moscow: URSS. 2020. 314 p. (Ser.: From the heritage of world sociology). (In Russian).
5. **Pearl R., Reed L.** Additional commentary on the mathematical theory of population growth / Transl. from English A.G. Rozenberg, G.S. Rozenberg // Samarskaya Luka: Byul. 2006. No. 18. P. 194-198. (In Russian).
6. **Raikhesberg N.M.** Adolphe Quetelet. His Life and Scientific Work. Moscow: Direct-Media, 2015. 165 p. (Ser.: The Life of Wonderful People; first edition – 1894). [file:///C:/Users/chica/Downloads/168942.pdf]. (Moscow: Elibron Classics, 2000, 98 p.). (In Russian).
7. **Rozenberg G.S.** Ecology Faces. Togliatti: Samar. SC RAN, 2004. 224 p. (free access: https://sites.google.com/site/tltrbo/home/osnovnye-izdania). (In Russian).

8. **Rozenberg G.S.** On the history of the logistic growth model // Samarskaya Luka: Byul. 2006. No. 18. P. 188-193. (In Russian).
9. **Rozenberg G.S.** Ward Clyde Ollie and the principle of aggregation of individuals // Samarskaya Luka: Problems of Regional and Global Ecology. 2020. V. 29, No. 3. P. 77-88. (In Russian).
10. **Rozenberg G.S.** 2021: From the History of Ecology. Togliatti: Anna, 2021. 32 p. (In Russian).
11. **André R.** Adolphe Quetelet, académicien. Actualité et universalité de la pensée scientifique d'Adolphe Quetelet, Brussels, 1996 // Académie Royale de Belgique. Classe des Sciences. Mémoires. Collection in-8o. 3e Série. Acad. Roy. Belgique (Brussels). 1997. V. 13. P. 23-45.
12. **Bacaër N.** Verhulst and the logistic equation // A Short History of Mathematical Population Dynamics. London: Springer, 2011. P. 35-39.
13. **Courchamp F., Berec J., Gascoigne J.** Allee Effects in Ecology and Conservation. N. Y.: Oxford Univ. Press, 2008. 256 p.
14. **Gruntfest Y., Arditi R., Dombrovsky Y.** A frag-mented population in a varying environment // J. Theoret. Biol. 1997. V. 185. P. 539-547.
15. **Kingsland S.** The Refractory model: The logistic curve and the history of population ecology // The Quarterly Review of Biology. 1982. V. 57, No. 1. P. 29-52.
16. **Lloyd P.J.** American, German and British antecedents to Pearl and Reed’s logistic curve // Population Studies. 1967. V. 21, No. 2. C. 99-108.
17. **Lotka A.J.** Elements of Physical Biology. Baltimore: Williams and Wilkins, 1924. 460 p.
18. **Mailly E.** Essai sur la vie et les ouvrages de Quetelet // Annuaire de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. 1875. V. 41. P. 109-297.
19. **Murray D.D.** Mathematical Biology. N. Y.: Springer, 2002. 551 p.
20. **O'Connor J.J., Robertson E.F.** Germinal Pierre Dandelin // MacTutor. 2012. [https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Dandelin/].
21. **Pastor J.** Mathematical Ecology of Populations and Ecosystems. Ecosystems. Oxford: Wiley-Blackwell, 2008. 319 p.
22. **Pearl R., Reed L.J.** On the rate of growth of the population of the United States since 1790 and its mathematical representation // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. 1920. V. 6, No. 6. P. 275-288.
23. **Quetelet A.** Sur l’homme et le développement de ses facultés ou essai de physique sociale. Paris: Bachelier, Imprimeur-Libraire (Quai des augustins, 55), 1835. 327 p. [https://archive.org/details/surlhommeetled00quet/page/n
345/mode/2up].
24. **Salisbury A.** Mathematical Models in Population Dynamics (A Thesis). Sarasota: New College of Florida, 2011. 104 p. [https://core.ac.uk/download/pdf/141995076.pdf].
25. **Smith D.P., Keyfitz N.** Mathematical Demography:
Selected Papers. Berlin et al.: Springer-Verlag, 2013. 514 p.
26. **Stephens P.A., Sutherland W.J., Freckleton R.P.** What is the Allee effect? // Oikos. 1999. V. 87, No. 1. P. 185-190.
27. **Verhulst P.F.** Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement // Correspondance mathématique et physique. 1838. V. 10. P. 113-121. (Verhulst P.-F. A note on the law of population growth // Smith D.P., Keyfitz N. Mathematical Demography: Selected Papers. Berlin et al.: Springer-Verlag, 2013. p. 279-283.).
28. **Verhulst P.-F.** Recherches Mathematiques sur la Loi de l’Accroissement de la Population // Nouveaux Memoires de l’Academie Royale dês Sciences et de Belles Lettres de Bruxelles. 1845. V. 18, Art. 1. P. 1-45. (Mathematical Researches into the Law of Population Growth Increase).

ADOLPH QUETELET AND LOGISTIC GROWTH MODELS

© 2021 G.S. Rozenberg

Institute of Ecology of the Volga Basin of the Russian Academy of Sciences – branch
Samara Federal Research Center RAS, Togliatti (Russia)

Abstract. Some biographical details of the life of one of the founders of mathematical statistics, the Belgian scientist A. Quetelet, are briefly discussed. Some extensions of the logistic growth model are considered.
Key words: probability theory, statistics, average person, population dynamics, sociology, astronomy.