

ПРАВКА ЛИСТОВЫХ ЗАГОТОВОК ПЛАСТИЧЕСКИМ РАСТЯЖЕНИЕМ С УЧЕТОМ СЖАТИЯ В ОБЛАСТИ ЗАХВАТОВ

© 2025 Е.А. Яновская

Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», г. Москва, Россия

Статья поступила в редакцию 03.02.2025

В статье приводится математическая модель для решения плоской задачи о растяжении пластической полосы, концы которой зажаты между двумя параллельными шероховатыми плоскостями захватов, дополненная несимметричностью условий на растекающихся приторцовых зонах. Найдена верхняя оценка общей силы сжатия захватами концевых зон пластически растягиваемой полосы, при достижении которой одновременно с пластическим растяжением полосы происходит пластическая осадка приторцовых ее частей захватами. Показано, что при дальнейшем деформировании происходит утонение полосы и разрыв не в средней ее растягиваемой части, а вблизи внутренней границы контакта с захватом.

Ключевые слова: плоская задача, растяжение полосы, сжатие участков захватами.

DOI: 10.37313/1990-5378-2025-27-1-155-165

EDN: VYNPRV

При прокатке тонких листов могут возникать дефекты в виде потери плоскостности из-за неравномерного обжатия заготовки по ширине, причиной которого могут являться упругий прогиб валков, а также упругое сплющивание поверхности валков в зоне пятна контакта [1], что в свою очередь влияет на неравномерность зазора между валками. Взаимодействие прокатанных участков с разными коэффициентами вытяжки вызывает в листе неравномерность напряжений: сжатия в более вытянутых участках и растяжения в менее вытянутых [2, 3]. При незначительной поперечной жесткости тонких листов прокат теряет устойчивость, образуя волнообразную поверхность (рис. 1) [3].

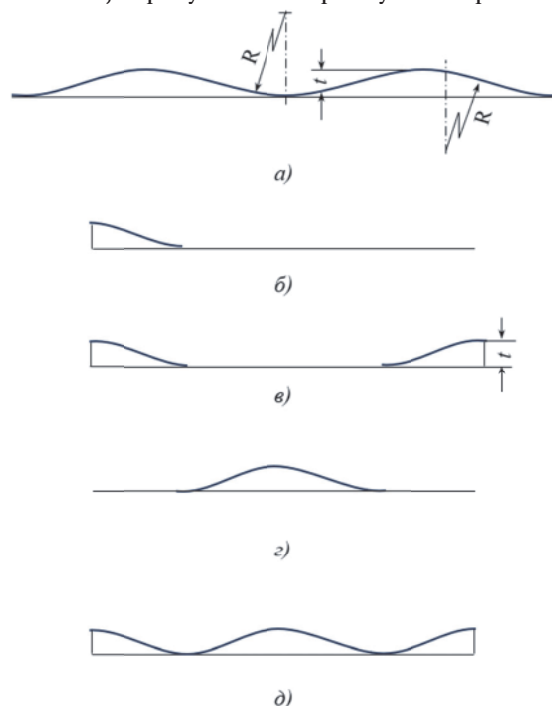


Рис. 1. Коробление тонких листов

После разрезки листа полосы также могут наследовать дефекты формы в направлении толщины. За показатель волнистости принимают величину относительной неравномерности вытяжки при прокатке продольных участков листовой заготовки [1, 2, 3]:

Яновская Елена Александровна, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики.
E-mail: elena_yanovskaya@bc.ru

$$\Delta\delta = \frac{L_{\max} - L_{\min}}{L}, \quad (1)$$

где L , $L_{\max}$, $L_{\min}$ – длины листа (полосы), наибольшего и наименьшего участков заготовки соответственно.

Принимая во внимание гипотезу, что волнистость имеет переменную кривизну только по направлению, а по величине равномерную, как показано на рис. 1а, на основе геометрических параметров (длины дуги радиусом R , хорды l и высоты t), можно выразить величину относительной неравномерности вытяжки продольных участков листа (полосы) [3]:

$$\Delta\delta \approx 2,7 \left(\frac{t}{l} \right)^2. \quad (2)$$

Тогда показателем волнистости будет отношение

$$\left(\frac{t}{l} \right)^2 = \text{const}$$

при любых изменениях волнистости у каждого конкретного листа (полосы).

Подлежащую правке заготовку закрепляют концами в захватах и затем перемещением одного или обоих захватов растягивают на определенную величину относительного удлинения. Для заготовок из малоуглеродистых сталей и алюминиевых сплавов относительное удлинение находится в пределах 1-3 %. В результате правки растяжением достигается уменьшение волнистости до 1-2 мм на 1 погонный метр длины, а чтобы получить высококачественные заготовки – до 0,15-0,2 мм на 1 погонный метр [3].

При правке растяжением длины прямолинейных участков заготовки увеличиваются до длины волнистых участков, что ведет к исчезновению прогибов и заготовка становится ровной в направлении толщины. При этом относительные удлинения различных участков заготовки на кривой упрочнения вписываются в зону $\delta_{\min} \delta_{\max}$ (рис. 2) [6].

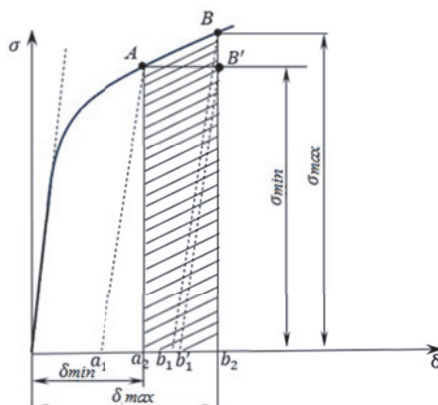


Рис. 2. Схема пружинения участков заготовки при снятии растягивающей нагрузки:

$a_1 a_2$ – относительная деформация укорочения наименее растянутых участков; $b_1 b_2$ – относительная деформация укорочения наиболее растянутых участков; b_1 – относительная деформация $\Delta\delta_{\text{ост}}$, компенсирующаяся появлением остаточной волнистости в менее растянутых участках

$$\Delta\delta_{\text{ост}} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{E},$$

где $\sigma_{\max}$, $\sigma_{\min}$ – напряжения в наиболее и наименее растянутых участках заготовки;

E – модуль упругости металла заготовки.

При равномерном растяжении возникающие относительные поперечные деформации по длине и толщине заготовки одинаковы по абсолютной величине. Зоны заготовки под захватами не могут деформироваться по ширине, т.е. являются жесткими концами, нарушающими равномерность растяжения, что приводит к образованию треугольных зон скольжения, заштрихованных на рис. 3 [3]. Вдоль боковых сторон треугольных зон происходит интенсивное течение металла. В итоге возникают зоны затрудненной и повышенной деформации. На расстоянии $(0,6 - 0,7)b$ от захватов образуются местные сужения растягиваемой заготовки, приводящие к нарушению прямолинейности силового потока и возникновению сжимающих напряжений поперек заготовки, а это, в свою очередь, может привести к потере устойчивости листа и возникновению продольной волнистости. Таким образом, допустимая величина относительного удлинения при правке растяжением тонких

заготовок ограничивается потерей их устойчивости [4, 5]. Растягивающая сила определяется растягивающим напряжением σ_p , устанавливаемым по кривой упрочнения по заданной величине относительного удлинения:

$$P = F\sigma_p. \quad (4)$$

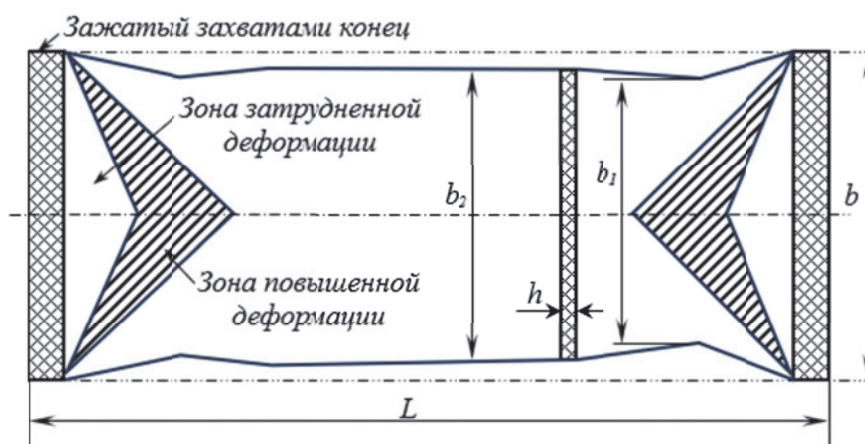


Рис. 3. Схема деформаций листовой заготовки при правке растяжением:

b, b_1, b_2 – соответственно исходная ширина полосы, уменьшение ширины в средней части и в зоне интенсивного течения металла в результате растяжения; h – толщина полосы

В зонах заготовки, расположенных под захватами, решается классическая задача о сжатии металла между сближающимися шероховатыми плоскостями твердых тел (захватов) [7]. Результаты объясняют присущие описываемым физическим процессам некоторые качественные особенности: явление проскальзывания вдоль поверхностей контакта захватов с заготовкой; соизмеримость нормальных упругих перемещений контактирующих тел с толщиной полосы [8]. С другой стороны, задача помогает объяснить механизм контактного взаимодействия твердых и пластически деформируемых тел. Л. Прандтлем построено предельное поле напряжений [7], которое Надаи [9] дополнил соответствующими скоростями течения. На основе анализа решения Прандтля – Надаи А.А. Ильюшиным [10] была предложена приближенная математическая модель для описания процесса течения пластических слоев.

Дальнейшее развитие эта теория получила в работах многих авторов, в том числе [11-14]. Рассмотрим частные задачи, которые приводят к общему решению правки листовых заготовок.

Задача 1. Сжатие полосы в условиях плоской деформации [15] в области:

$$S = \{(x, y) | -h < y < h; -l_1 < x < l_2\}$$

с симметричными условиями на концах в зонах захватов [16] (рис. 4).

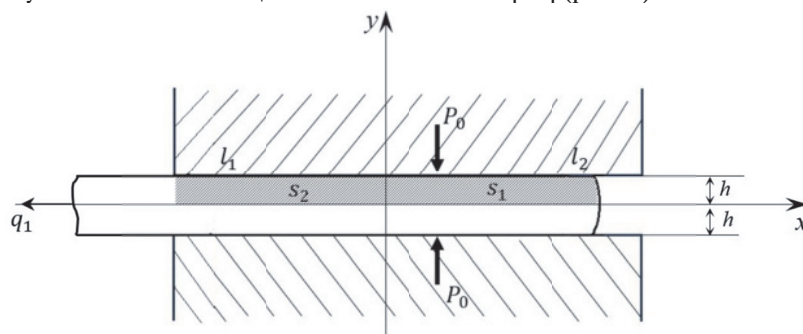


Рис. 4. К задаче о свободном растекании пластического слоя между плоскими захватами:

q_1 – растягивающая нагрузка; h – половина толщины полосы; $(-l_1, h); (l_2, h)$ – координаты крайних точек захвата; $l_2 = -l_1$ – симметричность условий на торцах

Постановка задачи в этом случае имеет вид системы, содержащей: уравнения квазистатического равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0, \quad (5)$$

условие пластичности

$$(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2 = 4\tau_s^2, \quad (6)$$

уравнения состояния

$$\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij} = \frac{2\sigma_s}{3v_{\text{и}}} v_{ij}; \quad (7)$$

$$v_{xx} + v_{yy} = 0. \quad (8)$$

Уравнение (7) представим в развернутом виде:

$$\sigma_{xx} - \sigma = \frac{2\sigma_s}{3v_{\text{и}}} v_{xx}; \quad (9)$$

$$\sigma_{yy} - \sigma = \frac{2\sigma_s}{3v_{\text{и}}} v_{yy}; \quad (10)$$

$$\sigma_{xy} - \sigma = \frac{2\sigma_s}{3v_{\text{и}}} v_{xy}. \quad (11)$$

Вычтем уравнение (10) из соотношения (9):

$$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = \frac{2\sigma_s}{3v_{\text{и}}} (v_{xx} - v_{yy}). \quad (12)$$

Найдем частное от деления уравнения (12) на (11):

$$\frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})}{\sigma_{xy}} = \frac{v_{xx} - v_{yy}}{v_{xy}} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)}, \quad (13)$$

Выпишем условие несжимаемости:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (14)$$

Добавим к задаче граничные условия:

$$y = 0: v = 0, \sigma_{xy} = 0; \quad (15)$$

$$y = h: v = -v_0 = \frac{dh}{dt}, \sigma_{xy} = -\tau_s \text{sign}(\vec{v} \cdot \vec{k}_1), \quad (16)$$

где $\vec{k}_1$ – положительное направление оси Ox . Из условия (7) следует, что на контактной границе $y = h$ существует неизвестная точка $x = x_p$, при переходе через которую напряжение σ_{xy} меняет знак, другими словами, точка $x = x_p$ попадает на линию ветвления течения. Поэтому интегрирование системы (5) будем проводить отдельно для областей:

$$S_1 = \{x | x_p < x < l\}, S_2 = \{x | -l < x < x_p\}, S = S_1 \cup S_2.$$

Неизвестная точка $x = x_p$ определяется из дополнительного условия непрерывности нормально-го напряжения σ_{yy} .

В предположении, что искомые компоненты скорости v и v_{xy} есть функции, зависящие только от координаты y :

$$v = v(y); \quad (17)$$

$$v_{xy} = v_{xy}(y)$$

получаем из уравнения несжимаемости (4) соотношение

$$u(x, y) = -\frac{\partial v(y)}{\partial y} \cdot x + f_1(y), \quad (18)$$

где $f_1(y)$, – постоянная интегрирования.

Подставляя (18) во второе уравнение (17), получим зависимость:

$$v_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v(y)}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2 v(y)}{\partial y^2} \cdot x + f_1'(y) \right).$$

В последнем уравнении члены, зависящие от координаты y , принимают значения:

$$\frac{\partial v(y)}{\partial x} = 0; \frac{\partial^2 v(y)}{\partial y^2} = 0$$

и решение отыщется в виде:

$$v = c_1 y + c_2, \quad (19)$$

где c_1 и c_2 – постоянные интегрирования, которые определяются из граничных условий:

$$\begin{aligned} \text{при } v|_{y=0} = 0 \text{ из уравнения (19): } 0 \cdot c_1 + c_2 = 0 \text{ находим } c_2 = 0; \\ \text{при } v|_{y=h} = -v_0 \text{ из уравнения (19): } h \cdot c_1 + c_2 = -v_0 \text{ находим } c_1 = -\frac{v_0}{h}. \end{aligned} \quad (20)$$

Учитывая, что соотношение (18) получили из условия несжимаемости (14), которое необходимо интегрировать в каждой из областей S_1 и S_2 . Поэтому скорости перемещений и скорости деформаций будут найдены:

$$v = -\frac{v_0}{h} y;$$

$$u = \begin{cases} -c_1 x + f_1(y), & x \in S_1 \\ -c_1 x + f_1^*(y), & x \in S_2 \end{cases}; \quad v_{xy} = \begin{cases} \frac{f_1'(y)}{2}, & x \in S_1 \\ \frac{f_1^{*'}(y)}{2}, & x \in S_2 \end{cases} \quad (21)$$

Интенсивность скоростей деформаций имеет вид:

$$\begin{aligned} v_u = \sqrt{\frac{2}{3} v_{ij} v_{ij}} = \sqrt{\frac{2}{3} (v_{xx}^2 + 2v_{xy}^2 + v_{yy}^2)} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{3} \left(c_1^2 + \frac{2(f_1')^2}{4} + c_1^2 \right)} \\ \sqrt{\frac{2}{3} \left(c_1^2 + \frac{2(f_1^{*'})^2}{4} + c_1^2 \right)} \end{cases} = \\ = \begin{cases} \frac{\sqrt{4c_1^2 + (f_1')^2}}{\sqrt{3}}, & x_p < x < l \\ \frac{\sqrt{4c_1^2 + (f_1^{*'})^2}}{\sqrt{3}}, & -l < x < x_p \end{cases}. \end{aligned} \quad (22)$$

Интегрирование двух уравнений равновесия (5) с учетом, что касательное напряжение σ_{xy} не зависит от координаты x , дает оценки нормальных напряжений

$$\sigma_{yy} = -f(x); \quad \sigma_{xx} = 2\sqrt{\tau_s^2 - \sigma_{xy}^2(y)} + \sigma_{yy}(x). \quad (23)$$

В последнем соотношении перед квадратным корнем сохранен знак «плюс», так как $\sigma_{yy} < 0$, а $|\sigma_{yy}| > |\sigma_{xx}|$ по физическому смыслу задачи. Далее, интегрируя первое уравнение равновесия системы (5) с учетом (23), имеем

$$\sigma_{xy} = f'(x) \cdot y + c_3. \quad (24)$$

Из вторых соотношений (15) и (16) заключаем, что в волокне слоя, совпадающим с осью x и на контактной границе с учетом (24):

при $y = 0$: $(x) \cdot 0 + c_3 = 0$ находим постоянную интегрирования $c_3 = 0$;

при $y = h$: $f'(x) \cdot h + c_3 = -\tau_s$ находим функцию $f'(x) = -\frac{\tau_s}{h}$.

Полученный результат подставим в уравнение (24):

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{\tau_s}{h}, & x_p < x < l_2 \\ +\frac{\tau_s}{h}, & l_1 < x < x_p \end{cases}. \quad (25)$$

Интегрируя (25), придем к соотношениям

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\tau_s}{h} \cdot x + c_4, & x_p < x < l_2 \\ \frac{\tau_s}{h} \cdot x + c_4^*, & l_1 < x < x_p \end{cases}; \quad \sigma_{xy}(y) = \begin{cases} -\frac{\tau_s}{h} \cdot y, & x_p < x < l_2 \\ \frac{\tau_s}{h} \cdot y, & l_1 < x < x_p \end{cases}. \quad (26)$$

Из сравнения значений σ_{xy} по формулам (6), (7), (25) видно, что для верхней части полосы при $(y > 0)$ $f_1^{*'}(y) > 0$, $f_1'(y) < 0$, поэтому интегрируя (25), получаем

$$f_1^{*'}(y) = \frac{2 \left(-\frac{v_0}{h}\right) \left(-\frac{\tau_s}{h}\right) \cdot y}{\sqrt{\tau_s^2 - \left(\frac{\tau_s}{h}\right)^2 \cdot y^2}} = \frac{2v_0\tau_sy}{h^2} \frac{h}{\tau_s\sqrt{h^2 - y^2}} = \frac{2v_0y}{h\sqrt{h^2 - y^2}}. \quad (27)$$

После интегрирования

$$f_1^*(y) = -\frac{2v_0}{h} \sqrt{h^2 - y^2} + c_5^*, \quad (28)$$

$$f_1(y) = \frac{2v_0}{h} \sqrt{h^2 - y^2} + c_5. \quad (29)$$

Из (23) и (25) имеем

$$\sigma_{xx} = \begin{cases} \frac{\tau_s}{h} \cdot x - c_4 + 2 \sqrt{\tau_s^2 - \left(\frac{\tau_s}{h}\right)^2 y^2} \\ -\frac{\tau_s}{h} \cdot x - c_4^* + \sqrt{\tau_s^2 - \left(\frac{\tau_s}{h}\right)^2 y^2} \end{cases}; \quad (30)$$

$$p = -\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(-\frac{\tau_s}{h} \cdot x + c_4\right) - \sqrt{\tau_s^2 - a^2 y^2}, & x_p < x < l_2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\tau_s}{h} \cdot x + c_4^*\right) + \sqrt{\tau_s^2 - a^2 y^2}, & l_1 < x < x_p \end{cases}. \quad (31)$$

Выпишем интегральные условия для определения постоянных c_4, c_4^*, c_5, c_5^* .

$$-q_1 h = \int_0^h \sigma_{xx}|_{x=l_1} dy; \quad 0 = \int_0^h \sigma_{xx}|_{x=l_2} dy, \quad (32)$$

$$v_0(l_2 - x_p) = \int_0^h u|_{x=l_2} dy = \int_0^h \left(\frac{v_0}{h} l_2 + 2 \frac{v_0}{\tau_s} \left[\sqrt{\tau_s^2 - \frac{\tau_s^2}{h^2} y^2} - \tau_s \right] + c_5 \right) dy, \quad (33)$$

$$v_0(l_1 + x_p) = \int_0^h u|_{x=l_1} dy = - \int_0^h \left(-\frac{v_0}{h} l_1 - 2 \frac{v_0}{\tau_s} \left[\sqrt{\tau_s^2 - \frac{\tau_s^2}{h^2} y^2} - \tau_s \right] + c_5^* \right) dy. \quad (34)$$

Условию растяжения на торце полосы отвечает $q_1 < 0$ ($|q_1| < \sigma_s$). Из (30) получаем

$$c_4^* = \frac{1}{h} \left[q_1 h + \tau_s l + 2 \int_0^h \sqrt{\tau_s^2 - \frac{\tau_s^2}{h^2} y^2} dy \right], \quad (35)$$

$$c_4 = \frac{1}{h} \left[\tau_s l + 2 \int_0^h \sqrt{\tau_s^2 - \frac{\tau_s^2}{h^2} y^2} dy \right]. \quad (36)$$

Из условия непрерывности σ_{yy} при $x = x_p$ следует

$$x_p = \frac{h(c_4 - c_4^*)}{2\tau_s} = -\frac{q_1 h}{2\tau_s} \leq \frac{h\sigma_s}{2\tau_s} = \frac{\sqrt{3}}{2} h. \quad (37)$$

Из (37) следует, что в случае свободно растекающейся полосы с симметричными условиями на концах ($q_1 = 0$) имеем $x_p = 0$.

$$c_5 = \frac{1}{h} \left\{ -v_0 x_p - 2 \frac{v_0}{\tau_s} \int_0^h \sqrt{\tau_s^2 - \frac{\tau_s^2}{h^2} y^2} dy \right\}, c_5^* = -c_5 - \frac{2v_0 x_p}{h}. \quad (38)$$

Отметим, что, если сближающиеся инструменты (захваты) перемещаются вдоль оси Ox со скоростью $u_o(t)$, то условия (38) для определения c_5, c_5^* видоизменяются

$$v_0(l_2 - x_p) = \int_0^h (u|_{x=l_2} - u_o) dy, \quad (39)$$

$$v_0(l_1 + x_p) = \int_0^h (u|_{x=l_1} + u_o) dy. \quad (40)$$

Задача 2. Рассмотрим приведенное решение в совокупности с пластическим растяжением полосы. Подобный процесс существенно зависит от общей силы сжатия P_0 захватами краевых участков полосы. При значениях P_0 , превышающих некоторое критическое значение P^{cr} жесткий захват полосы не обеспечивается ввиду того, что в зонах сжатия краевых участков полосы, еще до того, как начнется процесс растяжения, металл будет вытекать из-под захватов. При дальнейшем деформировании происходит утонение и разрыв полосы вблизи внутренней границы контакта с захватом. Пусть $l_1(t) < |X| < l_2(t)$ – область контакта с захватом, а $0 < |X| < l_1(t)$ – область пластического растяжения (рис. 5).

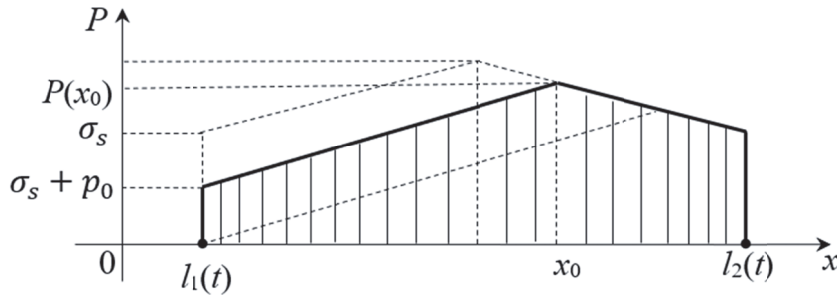


Рис. 5. Распределение контактного давления в области захвата

В области контакта полосы с захватом решение сохраняется, но нужно сделать преобразования

$$X(x) = x + \frac{l_1 + l_2}{2}, l_2 - l_1 = 2l, l_1 \leq X \leq l_2 \quad (41)$$

и принять условие (39) вместо (33), тогда получим

$$c_5 = \frac{1}{h} \left\{ -v_0 x_p - 2 \frac{v_0}{\tau_s} \int_0^h \sqrt{\tau_s^2 - \frac{\tau_s^2}{h^2} y^2} dy + u_o(t)h \right\}. \quad (42)$$

Выпишем в новых переменных, согласно (41), выражение для σ_{yy} :

$$\sigma_{yy} = \begin{cases} -\frac{\tau_s}{h} \left[X(x) - \frac{l_1 + l_2}{2} \right] - c_4; & X_p(x) < X(x) < l_2 \\ \frac{\tau_s}{h} \left[X(x) - \frac{l_1 + l_2}{2} \right] - c_4^*; & l_1 < X(x) < X_p(x) \end{cases}. \quad (43)$$

Положим, что полоса тонкая: $|l_2 - l_1| \gg h$. Найдём величину критической силы P^{cr} . Суммарная сила пластического сжатия торцов с учетом (41) будет

$$P^{cr} = -\frac{\tau_s}{h} (l^2 - x_p^2) - c_4^* (x_p + l) - c_4 (l - x_p), \quad (44)$$

где c_4^*, c_4, x_p определены формулами (35), (36) и (37).

Можно показать (см. рис. 5), что P^{cr} , полученное согласно (44), меньше соответствующего P_0 , необходимого для «чистого» сжатия той же части полосы со свободными концами. Найдем общую растягивающую силу

$$F_p = \int_{l_1}^{l_2} \sigma_{xy}(x) dx = 2\tau_s x_p. \quad (45)$$

Задачу решаем в области $|X| < l_1(t)$ в предположениях, что компоненты скорости зависят только от одной координаты $u = u(x)$, $v = v(y)$, тогда получим

$$\begin{aligned} u &= -\bar{c}_1 x; & v &= \bar{c}_1 y, \\ v_{xx} &= -v_{yy} = -\bar{c}_1; & v_{xy} &= 0, \\ v_u &= -\frac{2\bar{c}_1}{\sqrt{3}}; & \bar{c}_1 &= \frac{dh}{hdt}, \end{aligned} \quad (46)$$

где $h(t)$ – толщина части полосы, подверженной растяжению. Согласно (31), поле скоростей деформаций однородно.

Для силы сжатия приторцовых участков полосы $P_0 < P^{cr}$ имеет место лишь «чистое» растяжение средней части полосы. При $P_0 \geq P^{cr}$ одновременно с растяжением происходит пластическая осадка участков под захватами. Причем зависимость между скоростью перемещения захватов $u_0(t)$ и толщиной $h(t)$ с учетом уточненного условия (42) для c_5^* , f_1^* , можно найти из условия непрерывности $u = u(x, t)$ в точке $X = l_1(t)$: $u_0(t) = -\frac{c_1}{2}(l_1 + l_2) - \bar{f}_1^*$, где $\bar{f}_1^*$ – осредненное по толщине значение функции $f_1^*(y)$.

Теперь найдем законы изменения $l_1(t)$ и $l_2(t)$

$$\frac{dl_1}{dt} = u_0(t); \quad \frac{dl_2}{dt} = -\frac{c_1}{2}(l_2 - l_1) + \bar{f}_1^* + u_0(t), \quad l_i \Big|_{t=0} = l_{i0}, \quad (i = 1, 2). \quad (47)$$

Точность использованного решения Л. Прандтля – А. Надаи для осадки пластических полос тем выше, чем меньше толщина пластического слоя по сравнению с линейными размерами зоны контакта. Поэтому, пренебрегая в (47) членом $\frac{\bar{f}_1^*}{c_1 l_2}$, который мал по сравнению с другими слагаемыми

$$\left| \frac{\bar{f}_1^*}{c_1 l_2} \right| \approx \frac{h}{l} \ll 1,$$

имеем

$$\frac{dl_1}{dt} = -\frac{dh}{hdt} \frac{l_1 + l_2}{2}, \quad \frac{dl_2}{dt} = -\frac{dh}{hdt} l_2(t). \quad (48)$$

Решаем полученную систему (48) методом исключения переменных

$$l_2(t) = \frac{l_{20} h_0}{h(t)}, \quad l_1(t) = \left[l_{10} + \sqrt{h_0} l_{20} \left(\frac{1}{\sqrt{h}} - \frac{1}{\sqrt{h_0}} \right) \frac{\sqrt{h_0}}{\sqrt{h}} \right].$$

Подобная задача для частного случая решена в работе [18].

Задача 3. Правка полосы растяжением. Пусть края растягиваемой полосы подвержены сжатию захватами вблизи торцов. Найдем предельное значение общей силы сжатия торцов, при достижении которого одновременно с растяжением полосы будет иметь место пластическая осадка сжатых приторцовых зон, расположенных под захватами, и которая мешает осуществлению процесса правки. Сформулируем задачу в рамках теории течения в тонком пластическом слое:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{d\lambda}{dt} = 0, \quad (49)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{2\tau_s}{h} \frac{u - u_0}{|u - u_0|} = \begin{cases} -\frac{2\tau_s}{h}, & x_0(t) < x < l_2(t) \\ \frac{2\tau_s}{h}, & l_1(t) < x < x_0(t) \end{cases}, \quad (50)$$

где $u = u_0(t)$ – скорость движения захвата в направлении толщины слоя, которая считается заданной;

$x = x_0(t)$ – неизвестная линия ветвления течения; $h = h_0(t)$ – известный закон изменения толщины захваченной части полосы.

Краевые условия задачи:

$$x = x_0(t): u(x, t) = u_0(t), \quad (51)$$

$$x = l_2(t): \sigma_{xx} = -p + \frac{2}{3}\sigma_s + \frac{2}{3}\sigma_s \frac{dt}{d\lambda} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (52)$$

$$x = l_1(t): \sigma_{xx} = -p + \frac{2}{3}\sigma_s + \frac{2}{3}\sigma_s \frac{dt}{d\lambda} \frac{\partial u}{\partial x} = \sigma_s. \quad (53)$$

Условие (52) означает, что граница $x = l_2(t)$ свободна от нагрузок, а (53) подтверждает, что на внутренней границе области контакта $x = l_1(t)$ растягивающее напряжение достигает предельного значения σ_s . Решаем (49) с учетом (50):

$$u(x, t) = \frac{d\lambda}{dt} (x < x_0(t)) + u_0(t). \quad (54)$$

Условия (52) и (53) разрешим относительно контактного давления:

$$p_2 \equiv p(l_2, t) = \frac{4}{3}\sigma_s, p_1 \equiv p(l_1, t) = \frac{1}{3}\sigma_s.$$

Интегрируем уравнение равновесия (50) с учетом условий (52) и (53):

$$p = \begin{cases} p_2 + \frac{2\tau_s}{h}(l_2 - x), x_0(t) < x < l_2(t) \\ p_1 + \frac{2\tau_s}{h}(x - l_1), l_1(t) < x < x_0(t) \end{cases}. \quad (55)$$

Находим точку ветвления течения $x = x_0(t)$ из условия непрерывности давления в этой точке:

$$p(x_0 + 0, t) = p(x_0 - 0, t) \Rightarrow x_0(t) = \frac{l_1 + l_2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}h. \quad (56)$$

В случае тонкого слоя $\left(\frac{h}{l} \ll 1\right)$ формула (56) упрощается: $x_0(t) = \frac{l_1 + l_2}{2}$.

Теперь можем найти предельную общую силу сжатия торцов полосы, приходящуюся на единицу ширины захвата, при которой в процессе растяжения пластины из-под захватов, сжимаемых торцов, вытекает часть пластической среды:

$$\begin{aligned} P^{cr} &= \int_{l_1}^{l_2} p(x, t) dx = \int_{l_1}^{x_0} \left(p_1 + \frac{2\tau_s}{h}(x - l_1) \right) dx + \int_{x_0}^{l_2} \left(p_2 + \frac{2\tau_s}{h}(l_2 - x) \right) dx = \\ &= \left(p_1 x + \frac{2\tau_s}{h} \left(\frac{x^2}{2} - l_1 x \right) \right) \Big|_{x=l_1}^{x=x_0} + \left(p_2 x + \frac{2\tau_s}{h} \left(l_2 x - \frac{x^2}{2} \right) \right) \Big|_{x=x_0}^{x=l_2} = \\ &= p_1 x_0 + \frac{2\tau_s}{h} \left(\frac{x_0^2}{2} - l_1 x_0 \right) - p_1 l_1 - \frac{2\tau_s}{h} \left(\frac{l_1^2}{2} - l_1^2 \right) + p_2 l_2 + \frac{2\tau_s}{h} \left(\frac{l_2^2}{2} - l_2^2 \right) - \\ &\quad - p_2 x_0 - \frac{2\tau_s}{h} \left(l_2 x_0 - \frac{x_0^2}{2} \right) = \\ &= x_0(p_1 - p_2) - p_1 l_1 + p_2 l_2 + \frac{2\tau_s}{h} \frac{1}{2} (2x_0^2 - 2x_0(l_1 + l_2) + l_1^2 + l_2^2) = \\ &= x_0(p_1 - p_2) - p_1 l_1 + p_2 l_2 + \frac{\tau_s}{h} ((x_0 - l_2)^2 + (x_0 - l_1)^2). \end{aligned} \quad (57)$$

Подставим значения p_1, p_2, l_1, l_2 и, учитывая условие для тонкого пластического слоя, получим:

$$P^{cr} = \sigma_s \left(-\frac{l_1 + l_2}{2} + \frac{4l_2 - l_1}{3} + \frac{1}{2h\sqrt{3}} (l_2 - l_1)^2 \right) = \sigma_s \left(\frac{5(l_2 - l_1)}{6} + \frac{(l_2 - l_1)^2}{2h\sqrt{3}} \right) =$$

$$= \sigma_s \frac{(l_2 - l_1)}{2\sqrt{3}} \left(\frac{5\sqrt{3}}{6} + \frac{l_2 - l_1}{h} \right). \quad (58)$$

Очевидно, что $P_0 > P^{cr}$.

В качестве примера проведем расчет с соответствующими исходными данными:

$$l_1 = 10 \text{ мм}, l_2 = 20 \text{ мм}, h = 2 \text{ мм}, \sigma_s = 17 \text{ МПа}, \left(1 \text{ МПа} = \frac{10^6 \text{ Н}}{\text{м}^2} = 1 \text{ МН/м}^2 \right):$$

$$P^{cr} = \sigma_s \frac{(l_2 - l_1)}{2\sqrt{3}} \left(\frac{5\sqrt{3}}{6} + \frac{l_2 - l_1}{h} \right) = \frac{17 \cdot (20 - 10)}{2\sqrt{3}} \left(\frac{5\sqrt{3}}{6} + \frac{10}{2} \right) \approx$$

$$\approx \frac{170 \cdot 7,887}{3,464} \approx 387,064 (\text{Н}).$$

При сжатии захватами торцовых частей полосы толщиной $h = 2$ мм, длиной зоны захвата $l_2 - l_1 = 10$ и шириной $\delta = 10$ мм сила, необходимая для перевода деформируемой зоны в пластическое состояние, равна 0,387064 (кН).

ВЫВОД

В рамках модели идеально-пластического тела в представленной работе заработана математическая модель для решения плоской задачи о пластическом растяжении тонкой полосы с одно-временным сжатием захватами приторцовых участков в режиме однородного поля скоростей деформаций, при котором полоса выдерживает необходимые пластические деформации при правке растяжением, сохраняя постоянную толщину на всей ее длине – растягиваемого и сжатых участков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рудской, А.И. Теория и технология прокатного производства: Учебное пособие / А.И. Рудской, В.А. Лунев. – СПб.: Наука, 2008. – 527 с.
2. Целиков, А.И. Теория продольной прокатки / А.И. Целиков, Г.С. Никитин, С.Е. Рокотян. – М.: Металлургия, 1980. – 318 с.
3. Мошнин, Е.Н. Гибка, обтяжка и правка на прессах. Технология и оборудование/ Е.Н. Мошнин. – М.: Машгиз, 1959. – 360 с.
4. Вольмир, А.С. Устойчивость деформируемых систем / А.С. Вольмир. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
5. Тимошенко, С.П. Пластинки и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.: Наука, 1966. – 636 с.
6. Мошнин, Е.Н. Гибка и правка на ротационных машинах. Технология и оборудование / Е.Н. Мошнин. – М.: Машиностроение, 1967. – 272 с.
7. Прандтль, Л. Примеры применения теоремы Генки к равновесию пластических тел / Л. Прандтль. Теория пластичности. Сборник статей. – М.: Гос. изд. Иностранной литературы, 1948. – С. 102-113 [Prandtl L. Anwendungsbeispiele zu einem Henckyschen Satz iiber das plastische Gleichgewicht// ZAMM. 1923. Bd.3. H.6.Pp. 401-406].
8. Кийко, И.А. Течение тонкого слоя пластического материала по упруго-деформируемым поверхностям/ И.А. Кийко // Инжен. журн. – 1965. – Т. 5. – Вып. 2. – С. 372-375.
9. Надаи, А. Пластичность. Механика пластического состояния вещества [перевод с англ. под ред. Г.С. Лебен-зона] / А. Надаи. – М.: Объединенное научно-техническое издательство НКТП СССР, 1936.
10. Ильюшин, А.А. Труды (1946-1966). Т. 2. Пластичность / А.А. Ильюшин. – М.: Физматлит, 2004. – 480 с.
11. Георгиевский Д.В. Избранные задачи механики сплошной среды / Д.В. Георгиевский. – М.: ЛЕНАНД, 2018. – 560 с.
12. Сосенушкин Е.Н. Развитие теории течения пластически деформируемого слоя/ Е.Н. Сосенушкин, В.А. Кадымов, Е.А. Яновская и др. // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2019. – № 5. – С. 131-138.
13. Яновская, Е.А. Пластическое течение в тонком слое: теория, математические модели, анализ решений и их приложения. [Монография] / Е.А. Яновская, Е.Н. Сосенушкин. – М.: Янус-К, 2023. – 209 с.
14. Kadymov V.A. Contact problems of plastic flow in a thin layer: theory: Analysis of solutions and applications/ V.A. Kadymov, E.N. Sosenushkin, E.A. Yanovskaya// Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2022. – Т. 51. – № 3. – Р. 206-215.
15. Кадымов, В.А. К задаче о пластическом растяжении полосы с учетом условий на торцах/ В.А. Кадымов, Е.Н. Сосенушкин, Е.А. Яновская/ Сборник научных трудов международной конференции «Математика в созвездии наук». – М.: Изд-во Московского университета им. М.В. Ломоносова, 2024. – С. 407-409.
16. Кадымов, В.А. К задаче о комбинированном нагружении полосы/ В.А. Кадымов, Е.Н. Сосенушкин, Е.А. Яновская, С.А. Рогулин/ Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2024. – Т. 26. – № 3.

- С. 140-146.
17. Кадымов, В.А. Пластическое растяжение полосы с несимметричными условиями в области захватов/ В.А. Кадымов, Н.Л. Лисуниц, Е.А. Яновская // Черные металлы. – 2024. – №5. – С. 75-79.
 18. Кадымов, В.А. Математическое моделирование контактных задач пластического течения [Монография] / В.А. Кадымов. Saarbrücken: Palmarium Academic Publishing, 2016. – 129 с.

PLASTIC TENSION OF STRIP WITH ASYMMETRICAL CONDITIONS IN THE AREA OF GRIPS

© 2025 E.A. Yanovskaya

Moscow State Technological University «STANKIN», Moscow, Russia

The article presents a mathematical model for solving a plane problem of stretching a plastic strip whose ends are clamped between two parallel rough planes of grips, supplemented by asymmetry of conditions on the spreading end zones. An upper estimate of the total compression force of the end zones of a plastically stretched strip by grips is found, upon reaching which, simultaneously with plastic stretching of the strip, plastic subsidence of its end parts by grips occurs. It is shown that with further deformation, the strip becomes thinner and breaks not in its middle stretched part, but near the inner boundary of contact with the grip.

Keywords: flat problem, strip stretching, compression of sections by grippers

DOI: 10.37313/1990-5378-2025-27-1-155-165

EDN: VYNPRV

REFERENCES

1. Rudskoj, A.I. Teoriya i tekhnologiya prokatnogo proizvodstva: Uchebnoe posobie / A.I. Rudskoj, V.A. Lunev. – SPb.: Nauka, 2008. – 527 s.
2. Celikov, A.I. Teoriya prodol'noj prokatki / A.I. Celikov, G.S. Nikitin, S.E. Rokotyay. – M.: Metallurgiya, 1980. – 318 s.
3. Moshnin, E.N. Gibka, obtyazhka i pravka na pressah. Tekhnologiya i oborudovanie/ E.N. Moshnin. – M.: Mashgiz, 1959. – 360 s.
4. Vol'mir, A.S. Uстойчивost' deformiruemym sistem / A.S. Vol'mir. – M.: Nauka, 1967. – 984 s.
5. Timoshenko, S.P. Plastinki i obolochki / S.P. Timoshenko, S. Vojnovskij-Kriger. – M.: Nauka, 1966. – 636 s.
6. Moshnin, E.N. Gibka i pravka na rotacionnyh mashinah. Tekhnologiya i oborudovanie / E.N. Moshnin. – M.: Mashinostroenie, 1967. – 272 s.
7. Prandtl', L. Primery primeneniya teoremy Genki k ravnovesiyu plasticheskikh tel / L. Prandtl'. Teoriya plastichnosti. Sbornik statej. – M.: Gos. izd. Inostrannoj literatury, 1948. – S. 102-113 [Prandtl L. Anwendungsbeispiele zu einem Henckyschen Satz iiber das plastische Gleichgewicht// ZAMM. 1923. Bd.3. H.6. Pp. 401-406].
8. Kijko, I.A. Techenie tonkogo sloya plasticheskogo materiala po uprugodeformiruemym poverhnostyam/ I.A. Kijko // Inzhen. zhurn. – 1965. – T. 5. – Vyp. 2. – S. 372-375.
9. Nadai, A. Plastichnost'. Mekhanika plasticheskogo sostoyaniya veshchestva [perevod s. angl. pod red. J.T.C. Lebenzona] / A. Nadai. – M.: Ob»edinennoe nauchno-tekhnicheskoe izdatel'stvo NKTP SSSR, 1936.
10. Il'yushin, A.A. Trudy (1946-1966). T. 2. Plastichnost' / A.A. Il'yushin. – M.: Fizmatlit, 2004. – 480 s.
11. Georgievskij, D.V. Izbrannye zadachi mekhaniki sploshnoj sredy / D.V. Georgievskij. – M.: LENAND, 2018. – 560 s.
12. Sosenushkin E.N. Razvitie teorii techeniya plasticheskoi deformiruemogo sloya/ E.N. Sosenushkin, V.A. Kadymov, E.A. Yanovskaya i dr. // Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki. – 2019. – № 5. – S. 131-138.
13. Yanovskaya, E.A. Plasticheskoe techenie v tonkom sloe: teoriya, matematicheskie modeli, analiz reshenij i ih prilozheniya. [Monografiya] / E.A. Yanovskaya, E.N. Sosenushkin. – M.: Yanus-K, 2023. – 209 s.
14. Kadymov, V.A. Contact problems of plastic flow in a thin layer: theory: Analysis of solutions and applications/ V.A. Kadymov, E.N. Sosenushkin, E.A. Yanovskaya// Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2022. – T. 51. – № 3. – P. 206-215.
15. Kadymov, V.A. K zadache o plasticheskom rastyazhenii polosity s uchedom uslovij na torcah/ V.A. Kadymov, E.N. Sosenushkin, E.A. Yanovskaya/ Sbornik nauchnyh trudov mezhdunarodnoj konferencii «Matematika v sozvezdii nauk». – M.: Izd-vo Moskovskogo universiteta im. M.V. Lomonosova, 2024. – S. 407-409.
16. Kadymov, V.A. K zadache o kombinirovannom nagruzhении polosity/ V.A. Kadymov, E.N. Sosenushkin, E.A. Yanovskaya, S.A. Rogulin/ Izvestiya Samarskogo nauchnogo centra Rossijskoj akademii nauk. – 2024. – T. 26. – № 3. – S. 140-146.
17. Kadymov, V.A. Plasticheskoe rastyazhenie polosity s nesimmetrichnymi usloviyami v oblasti zahvatov/ V.A. Kadymov, N.L. Lisunec, E.A. Yanovskaya // Chernye metally. – 2024. – №5. – S. 75-79.
18. Kadymov, V.A. Matematicheskoe modelirovanie kontaktnykh zadach plasticheskogo techeniya [Monografiya] / V.A. Kadymov. Saarbrücken: Palmarium Academic Publishing, 2016. – 129 s.