

УДК 629.7.036 : 621.431.75

**РАЗРАБОТКА АНАЛИТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ УПРУГОГО КОЛЬЦА  
С ВЫСТАПАМИ КАК МНОГООПОРНОЙ БАЛКИ**

© 2024 Ло Чэн

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва,  
г. Самара, Россия

Статья поступила в редакцию 03.12.2024

Статья посвящена оценке статической жёсткости упругого кольца в гидродинамических демпферах, которые часто используются в опорах авиационных газотурбинных двигателей (ГТД) для снижения вибрации роторов. В работе представлен оригинальный метод оценки этой характеристики. Упругое демпферное кольцо моделируется набором прямых балок, соединённых шарнирами. Для расчёта реальной реактивной силы, возникающей от контакта по выступам упругих колец, используется метод передаточных моментов. Жёсткость определяется как векторная сумма сил, возникающих на всех рабочих участках. Практическая значимость работы заключается в том, что разработанный метод может быть использован для аналитической оценки жёсткости опоры двигателя с учётом влияния коэффициента трения.

**Ключевые слова:** упругое кольцо, демпфер, жёсткость, балочная модель.

DOI: 10.37313/1990-5378-2025-27-1-127-138

EDN: VPWQEA

**ВВЕДЕНИЕ**

Большинство авиационных двигателей используют гидродинамические демпферы как ключевую часть конструкции снижения вибрации [1]. Демпфер с упругим кольцом, содержащим выступы на наружной и внутренней поверхностях, расположенных в шахматном порядке, часто используется в опорах авиационных ГТД для снижения вибрации роторов [2,3]. В данной работе представлен оригинальный метод оценки статической жесткости упругого кольца. В этом методе упругое демпферное кольцо моделируется набором прямых балок, соединенных шарнирами. Разработанный подход заключается в использовании метода передаточных моментов для расчета реальной реактивной силы, возникающей от контакта по выступам упругих колец и оценки жесткости, определяемой как векторная сумма.

**1. КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ**

В известных ранее исследованиях жесткость упругого кольца обычно определялась либо путем численного моделирования с помощью программного обеспечения [4,5,6,7,8] и фактических измерений компонентов [9,10], либо аналитически [2,10]. При аналитическом подходе каждый сегмент упругого кольца обычно рассматривается как независимая, жестко закрепленная балка [3] в форме дуги или прямой, а затем жесткость каждого сегмента балки складывается для получения общей величины жесткости.

В настоящей работе предложен новый метод, использующий более реальные граничные условия. Геометрия модели, использованной для анализа, представлена на рис. 1-1. Физический смысл геометрических параметров и их величины, принятые для расчетов, приведены в табл. 1.

**2. РАЗРАБОТКА МОДЕЛИ УПРУГОГО КОЛЬЦА**

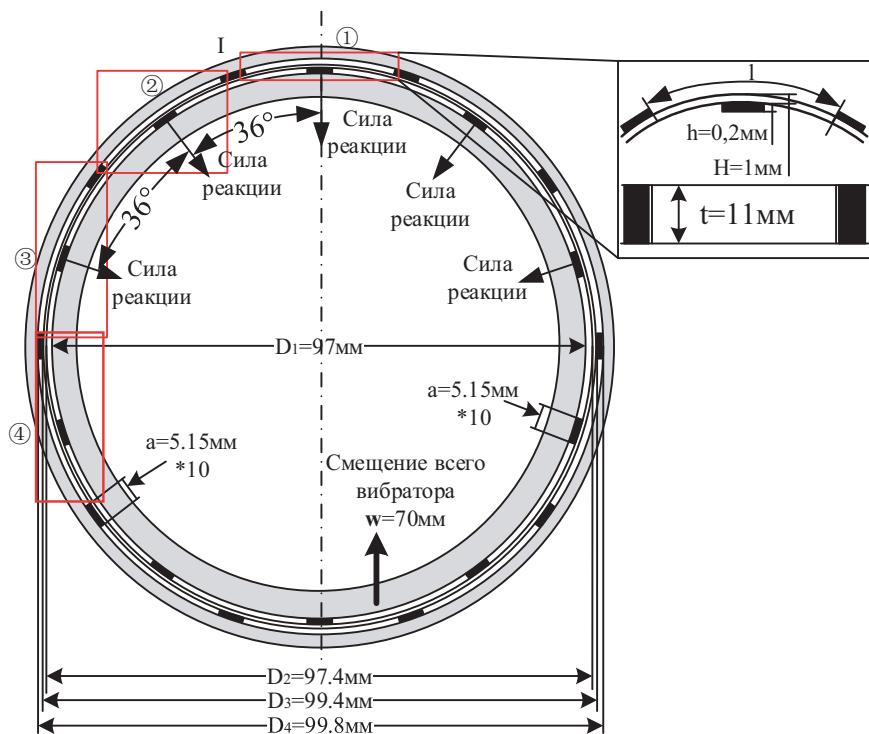
Кольцо является многоопорной неразрезной балкой, расчет которой является статически неопределенной задачей. В работах [11,12] показано, что упругое кольцо можно смоделировать многоопорной разрезной балкой, состоящей из четырех участков различного типа - симметричных и асимметричных (рис. 2-1). Модель будет создаваться для каждого из указанных типов балок.

Ло Чэн, аспирант кафедры конструкции и проектирования двигателей летательных аппаратов.  
E-mail: clpe@mail.nwpu.edu.cn

Таблица 1. Геометрические параметры упругого кольца

Обозначение параметра	Физический смысл	Величина
D <sub>1</sub>	Внутренний диаметр	97 мм
D <sub>2</sub>	Внутренний диаметр гладкой части кольца	97,4 мм
D <sub>3</sub>	Наружный диаметр гладкой части кольца	99,4 мм
D <sub>4</sub>	Наружный диаметр поперечного сечения упругого кольца демпфера	99,8 мм
a	Ширина выступа	5,15 мм
b	Длина упругой части кольца (рис. 1-3)	10,3 мм
l	Длина симметрической балки	25,75 мм
H	Толщина кольца	1 мм
h	Высота выступа	0,2 мм
w	Заданная начальная деформация	70 мкм
t	Ширина упругого кольца по оси	11 мм
n	Число выступов упругого кольца	10

Рис. 1-1. Поперечное сечение модели демпфера с упругим кольцом



## 2.2 Расчет второй прямой балки ①

Как показано в работе [13], контакт по выступам происходит практически по одной линии, поэтому схему деформации можно представить так, как показано на рис.2-2. Расчетная модель

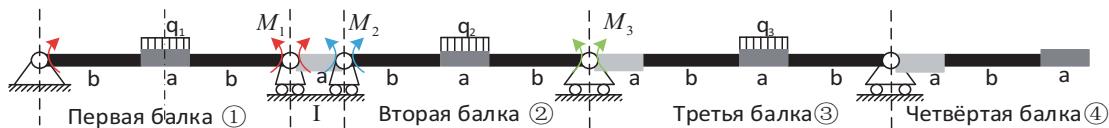


Рис. 2-1. Схема модели первого сектора, состоящего из прямых балок (основная система)

симметричной балки (то есть балка ① рисунок 1-1) представлена на рис. 2-1. Величины  $a$  и  $b$  в дальнейших расчетах соответствуют данным, указанным в табл. 1. Первая балка является балкой с защемленными концами, которые дают в опорах момент  $M_R$  и реакцию опоры  $F_R$ . Система является статически неопределенной.

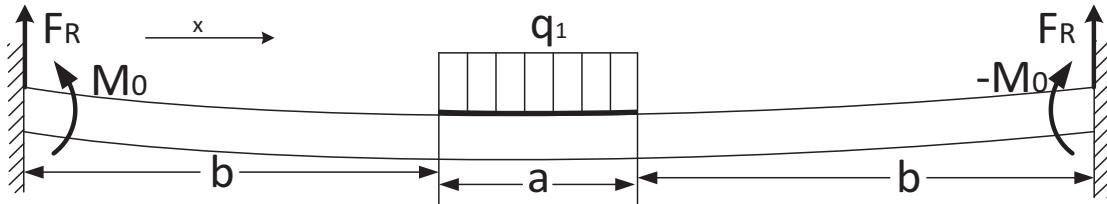
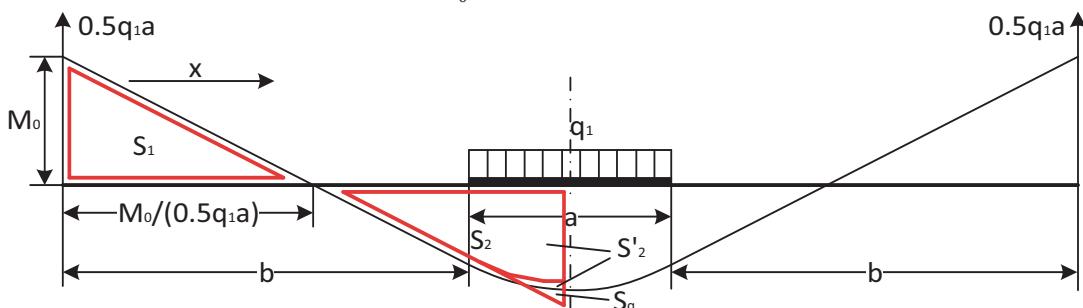


Рис. 2-2. Упрощенная схема первой прямой балки ①

Поскольку рассматривается симметричная двухопорная балка, что и показано на рис. 2-2, то очевидно, что для реакции опор  $F_R$  имеем  $F_R = 0,5 q_1 a$ . В середине балки, т. е. при  $x=b+0.5a$ , угол поворота сечения  $\theta = 0$ . Следовательно, интеграл изгибающего момента по длине от  $x=0$  до  $x=b+0.5a$ , т. е. угол отклонения в середине, равен 0.  $M_0$  – неизвестный пока начальный момент.

Рис. 2-3. Диаграмма изгибающего момента для упрощенного расчета,  
 $M_0$  – неизвестный изгибающий момент на конце стержня

$S_1$  и  $S_2$  – соответствующие области на рис. 2-3. Наклон прямой есть производная от изгибающего момента, то есть величины опорной силы в конечной точке.

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1 = \frac{1}{2} M_0 [M_0 / (0,5q_1 a)] \\ S_2 = S'_2 - S_q \\ S'_2 = \frac{1}{2} [0,5q_1 a] [(b + \frac{1}{2} a) - M_0 / (0,5q_1 a)]^2, \\ S_q = \int_0^{\frac{1}{2}a} \int_0^x q_1 x dx dx \\ S_q \in S'_2 \\ S_1 = S_2 \end{array} \right.$$

$b = 2a$ ,  $q_1 x$  – сила.  $\int_0^x q_1 \cdot x \cdot dx$  – изгибающий момент от распределенной нагрузки  $q_1$ , который также является значением ординаты на рис. 2-2. Определим площадь криволинейного участка  $S_q = \int_0^{\frac{1}{2}a} \int_0^x q_1 \cdot x \cdot dx \cdot dx$  или другими словами  $S_q = \int_0^{0.5a} M_{(S_q)} \cdot dx$ , где  $M_{(S_q)}$  – изгибающий момент участка  $S_q$ . Из приведенных выше формул для начального момента получим  $M_0 = \frac{37}{60} q_1 \cdot a^2$ .

Очевидно, что выражения для момента на каждом из выделенных участков будут иметь вид [14,15]:

$$M_1 = \begin{cases} \frac{37}{60}q_1 \cdot a^2 - \frac{1}{2}q_1 \cdot a \cdot x, & 0 < x < b \\ \frac{37}{60}q_1 \cdot a^2 - \frac{1}{2}q_1 \cdot a \cdot x + \frac{1}{2}q_1 \cdot (x - b)^2, & b < x < a + b \\ \frac{37}{60}q_1 \cdot a^2 - \frac{1}{2}q_1 \cdot a \cdot b + \frac{1}{2}q_1 \cdot (x - a - b)^2, & a + b < x < a + 2b \end{cases}. \quad (2.1)$$

Выражения для угла поворота получим согласно формулам (2.1) интегрированием выражений для момента:

$$(EI)_1\theta_1 = - \int M_1 dx = \begin{cases} \frac{1}{4}q_1 \cdot a \cdot x^2 - \frac{37}{60}q_1 \cdot a \cdot x, & 0 < x < b \\ (\frac{1}{4}q_1 ab^2 - \frac{37}{60}q_1 a^2 b) - \frac{37}{60}q_1 a^2(x - b) + \frac{1}{4}q_1 a(x^2 - b^2) - \frac{1}{6}q_1(x - b)^3, & b < x < a + b \\ q_1(\frac{1}{4}ab^2 - \frac{7}{60}a^2b - \frac{8}{15}a^3) + q_1(\frac{1}{2}ab - \frac{37}{60}a^2)(x - a - b) - \frac{1}{6}q_1(x - a - b)^3, & a + b < x < a + 2b \end{cases}. \quad (2.2)$$

Выражения для перемещения получим согласно формулам (2.3) интегрированием угла поворота:

$$(EI)_1y_1 = \int \theta_1 dx = \begin{cases} \frac{1}{12}q_1 ax^3 - \frac{37}{120}q_1 a^2 x^2, & 0 < x < b \\ q_1(\frac{1}{12}ab^3 - \frac{37}{120}a^2b^2) + \frac{1}{12}q_1 a(x^3 - b^3) - \frac{37}{120}q_1 a^2(x^2 - b^2) - \frac{1}{24}q_1(x - b)^4, & b < x < a + b \\ \dots \end{cases}. \quad (2.3)$$

Поскольку смещение последнего сегмента первой балки симметрично и не влияет на ключевые параметры, оно опущено. В центре, то есть при  $x = b + 0.5 \cdot a$  значение прогиба максимальное. Подставив  $x = b + 0.5 \cdot a$  в соотношения (2.3), получим выражение (2.4) для перемещения:

$$(EI)_1y_1 = -\frac{133}{1920}q_1 a^4 - \frac{59}{240}q_1 a^3 b - \frac{11}{60}q_1 a^2 b^2 + \frac{1}{12}q_1 a b^3 = -441,48 \cdot 10^{-12} \cdot q_1. \quad (2.4)$$

Согласно формуле 2.3 для средневзвешенной изгибной жесткости кольца получаем  $(EI)_1 = [4^4 \cdot (EI)_H + (EI)_{H+h}] / (4^4 + 1) = 0,1939 H \cdot m^2$ .

Отсюда получаем, что для распределенной нагрузки на выступ  $q_1 = \frac{(EI)_1 y_1}{-441,48 \cdot 10^{-12}} = 30,745 H/mm$ , а для силы реакции  $F_1 = q_1 a = 158,34 H$ .

## 2.2 Расчет второй прямой балки (2)

Как и для симметричной балки, для расчета второй прямой балки также используется модель с защемленными концами. Модель также осесимметрична. Поэтому результаты расчета такие же, как и для первой балки, за исключением величины распределенной нагрузки, которая в данном случае будет равна  $q_2$ . Для перемещения получим выражение (2.5). В центре значение прогиба при  $x = b + 0.5a$  максимальное.

$$(EI)_2y_2 = -\frac{133}{1920}q_2 a^4 - \frac{59}{240}q_2 a^3 b - \frac{11}{60}q_2 a^2 b^2 + \frac{1}{12}q_2 a b^3 = -441,48 \cdot 10^{-12}q_2 \cdot (EI)_2. \quad (2.5)$$

Общая суммарная деформация (внутреннего жесткого кольца, имитирующего ротор) равна  $y_2 = -70 \text{мкм} \cdot \cos(36^\circ) = -56,63 \text{мкм}$  потому, что деформация второй прямой балки является ее компонентом, изменяющимся в направлении, перпендикулярном второй прямой балке.

При этом получим  $q_2 = \frac{(EI)_2 y_2}{-441,48 \cdot 10^{-12}} = 24,873 H/mm$ ,  $F_2 = q_2 a = 128,10 H$ .

## 2.3 Расчет третьей прямой балки (3)

Расчетная модель третьей балки представлена на рис. 2-4. Так как следующая балка находится в нижней полуокружности, то давление на правую сторону узла отсутствует, поэтому нет и встречного момента. С правой стороны прямой балки находится шарнир, который обеспечивает только поддержку.

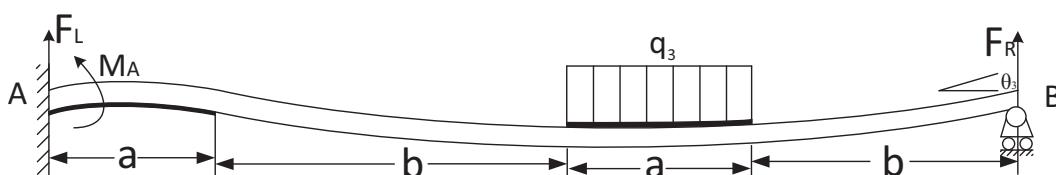


Рис. 2-4. Упрощенная модель балки (3)

На рисунке 2-4 сила  $F_R$  пока неизвестна. Восстанавливающий изгибающий момент  $M_A$  можно рассчитать после получения силы  $F_R$ .

Несимметричная балка состоит из нескольких участков. Согласно методу начальных параметров [15] для угла поворота сечения и перемещения в таких балках имеем следующие выражения:

$$\begin{cases} EI\theta = \sum_i M(x - l_i) + \sum_i \frac{1}{2!} F(x - l_i)^2 + \sum_i \frac{1}{3!} q(x - l_i)^3, (x - l_i) > 0 \\ EIy = \sum_i \frac{1}{2!} M(x - l_i)^2 + \sum_i \frac{1}{3!} F(x - l_i)^3 + \sum_i \frac{1}{4!} q(x - l_i)^4, (x - l_i) > 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Следовательно, мы имеем два уравнения, а неизвестных три. То есть получаемая система уравнений имеет больше неизвестных, чем можно составить уравнений статического равновесия. Следовательно, система статически неопределенная. Решить ее можно методом перемещений или, другими словами, методом совместности деформаций [15].

Для решения полученной статически неопределенной системы уберем неподвижную опору на конце В и заменим ее реакцией и моментом. Полученная таким образом система является основной балкой, которая представлена на рис. 2-5.

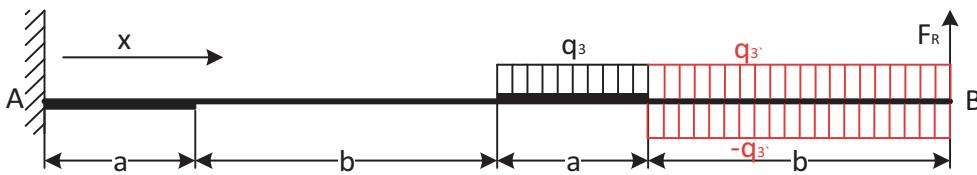


Рис. 2-5. Основная система прямой балки ③

Данная балка имеет несколько участков нагружения. На четвертом участке распределенная нагрузка отсутствует, поскольку, как показано в работе Артемова [10], при посадке кольца в корпус с зазором работает только верхняя половина кольца. Чтобы сохранить выражения изгибающего момента от распределенной нагрузки такими же, как на предыдущем участке, по рекомендации работы [15], нужно продолжить распределенную нагрузку третьего участка до конца балки. Для компенсации этой добавленной нагрузки необходимо добавить такую же нагрузку другого знака. Равновесие балки от этого не нарушится, не изменятся величины опорных реакций.

Превратим далее основную систему в систему, полностью совпадающую с заданной статически неопределенной балкой (рис. 2-3). Для этого необходимо загрузить балку распределенной нагрузкой  $q_3$  и в точке В приложить реакцию опоры  $F_R$ . Однако этого мало: в основной балке (рис. 2-4) точка В может перемещаться по вертикали под действием нагрузок  $q_3$  и  $F_R$ . В исходной статически неопределенной балке (рис. 2-4) точка В не имеет такой возможности. Она должна совпадать с исходным шарниром. Поэтому для полного соответствия исходной статически неопределенной балки (рис. 2-3) и основной статически определенной балки (рис. 2-4) надо добавить условие, чтобы прогиб  $f_B$  точки В основании системы под действием нагрузок  $q_3$  и  $F_R$  должен быть равен нулю:

$$f_B = 0. \quad (2.7)$$

Выполнение условия (2.7), называемого условием совместности перемещений или деформаций можно представить следующим образом.

Прогиб точки В основной системы под действием нагрузок складывается из двух прогибов: одного  $f_{Bq}$ , вызванного лишь нагрузкой  $q_3$  и другого  $f_{BR}$ , вызванного неизвестной реакцией  $F_R$ . Таким образом,

$$f_B = f_{Bq} + f_{BR} = 0. \quad (2.8)$$

Для вычисления этих прогибов необходимо, согласно [15, стр.337-338], загрузить вначале основную систему одной нагрузкой  $q_3$  (рис.2-5), а затем одной реакцией опоры  $F_R$  (рис.2-6).

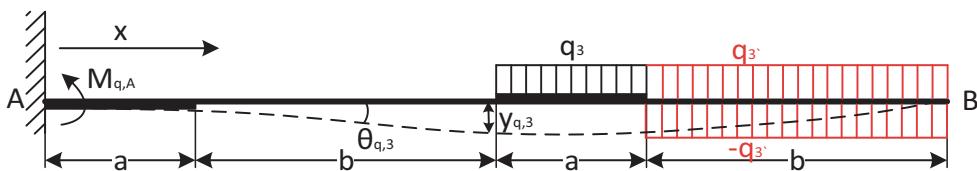


Рис. 2-6. Схема расчета деформации при приложении только распределенной нагрузки

$M_{q,A}$  – восстанавливающий момент на конце А, когда  $q$  действует, а  $F_R$  не действует.

Тогда для момента  $M_{q,A}$  получим:

$$M_{q,A} = \int_{a+b}^{2a+2b} q_3 x dx - \int_{2a+b}^{2a+2b} q_3 x dx = (\frac{3}{2}a^2 + ab)q_3.$$

Поставив полученное выражение для момента в соотношения (2.6), получим для угла и перемещения на этом участке следующие выражения, только при действии распределенной нагрузки  $q_3$ :

$$\begin{cases} (EI)_3 \theta_{q,3} = -\left(\frac{3}{2}a^2 + ab\right)q_3 x + \frac{1}{2}(q_3 a)x^2 - \frac{1}{6}q_3(x-a-b)^3 + \frac{1}{6}q_3(x-2a-b)^3 \\ (EI)_3 y_{q,3} = -\left(\frac{3}{2}a^2 + ab\right)\frac{1}{2}q_3 x^2 + \frac{1}{6}(q_3 a)x^3 - \frac{1}{24}q_3(x-a-b)^4 + \frac{1}{24}q_3(x-2a-b)^4. \end{cases}. \quad (2.9)$$

Если приложить только реакцию  $F_R$ , как показано на рис. 2-7, то для угла и перемещения получаются следующие выражения:

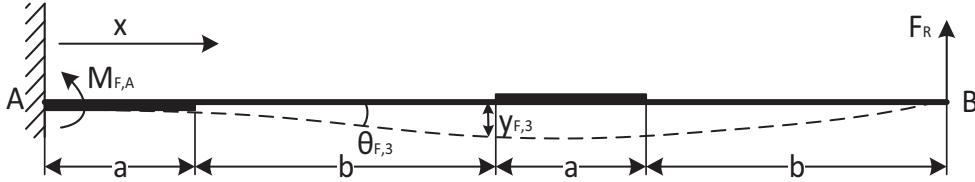


Рис. 2-7. Схема расчета деформации при приложении только опорной силы

$$\begin{cases} M_{F,A} = -F_R(2a+2b) + F_R x \\ (EI)_3 \theta_{F,3} = -\int M_{F,3} dx = F_R(2a+2b)x - \frac{1}{2}F_R x^2 \\ (EI)_3 y_{F,3} = \int \theta_{F,3} dx = \frac{1}{2}F_R(2a+2b)x^2 - \frac{1}{6}F_R x^3 \\ b = 2a \end{cases}. \quad (2.10)$$

где  $M_{F,A}$  – восстанавливающий момент на конце А, когда  $F_R$  действует, а  $q$  не действует.

Следовательно, из 2.9 и 2.10 можно получить систему уравнений на конце В в следующем виде:

$$\begin{cases} \theta_{F,3} + \theta_{q,3} = 18a^2 F_R - \frac{37}{6}q_3 a^3 = \theta_3 \\ y_{F,3} + y_{q,3} = 72a^3 F_R - \frac{713}{24}q_3 a^4 = 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Интерес представляет нижнее уравнение системы (2.11). Для того, чтобы решить ее, рассмотрим  $F_R$  как функция от  $q_3$ . Откуда выражается сила реакции опоры и изгибающий момент конца стержня на конце В:

$$\begin{cases} F_R = \frac{713}{1728}q_3 a \\ \theta_3 = \frac{121}{96}q_3 a^2 / (EI)_3. \end{cases}$$

Аналогично рассчитывается сила реакции опоры и изгибающий момент конца стержня на стороне А:

$$\begin{cases} b = 2a \\ F_L = q_3 a - F_R = \frac{1015}{1728}q_3 a. \end{cases} \quad (2.12)$$

Отсюда для момента  $M_A$  получим следующее выражение:

$$M_A = \int_{a+b}^{2a+b} q_3 x dx - F_R(2a+2b) = \frac{295}{288}q_3 a^2. \quad (2.13)$$

Применим статический метод для определения силы всего сечения, для этого необходима диаграмма изгибающего момента, как показано на рис. 2-8.

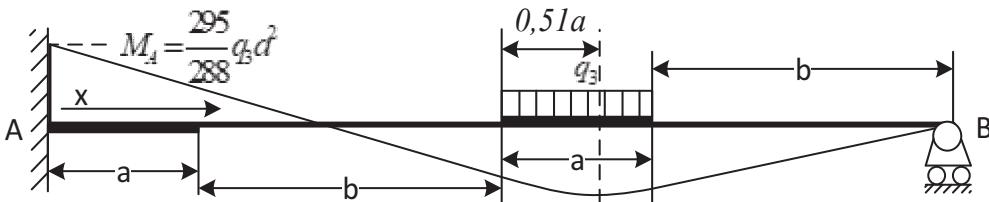


Рис. 2-8. Диаграмма изгибающего момента всего сегмента прямой балки ③

Соответствующий угол поворота и прогиб определяем по уравнению 2.6

$$(EI)_3 \theta_3 = \begin{cases} -\frac{295}{288}q_3 a^2 x + \frac{1015}{1728}q_3 a \cdot \frac{1}{2}x^2, & 0 < x < a+b \\ -\frac{295}{288}q_3 a^2 x + \frac{1015}{1728}q_3 a \cdot \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}q_3(x-a-b)^3, & a+b < x < 2a+b \\ -\frac{295}{288}q_3 a^2 x + \frac{1015}{1728}q_3 a \cdot \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}q_3(x-a-b)^3 + \frac{1}{6}q_3(x-2a-b)^3, & 2a+b < x < 2a+2b. \end{cases} \quad (2.14)$$

Проинтегрируем уравнение 2.11 по переменной  $x$ :

$$(EI)_3 y_3 = \begin{cases} -\frac{295}{288} q_3 a^2 \cdot \frac{1}{2} x^2 + \frac{1015}{1728} q_3 a \cdot \frac{1}{6} x^3, & 0 < x < a+b \\ -\frac{295}{288} q_3 a^2 \cdot \frac{1}{2} x^2 + \frac{1015}{1728} q_3 a \cdot \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{24} q_3 (x-a-b)^4, & a+b < x < 2a+b \\ -\frac{295}{288} q_3 a^2 \cdot \frac{1}{2} x^2 + \frac{1015}{1728} q_3 a \cdot \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{24} q_3 (x-a-b)^4 + \frac{1}{24} q_3 (x-2a-b)^4, & 2a+b < x < 2a+2b. \end{cases} \quad (2.15)$$

Согласно характеристике производной, при максимальном перемещении угол поворота равен 0. В соответствии с (2.14), при  $x = a+b + 0.51a$  для  $\theta_3 = 0$ . Другими словами, это положение крайнего значения переменной деформации. По (2.15), при  $x = a+b + 0.51a$ , для  $y_3$  получаем выражение следующее выражение:

$$y_3 = -2,079 q_3 a^4 / (EI)_3.$$

Поскольку  $y_3$  задано и равно  $y_3 = -70 \text{мкм} \cdot \cos(72^\circ) = -21.63 \text{мкм}$ , то для изгибной жесткости получаем следующее значение:

$$(EI)_3 = [2^4 \cdot (EI)_H + (EI)_{H+\frac{1}{2}}]/(2^4 + 1) = 0,2017 H \cdot m^2.$$

Отсюда для распределенной нагрузки  $q_3$  и силы  $F_3$  можно получить следующие значения:

$$q_3 = \frac{(EI)_3 y_3}{-2,079 a^4} = 2,983 H/\text{мм}, F_3 = q_3 a = 15,4 H.$$

### 3. СБОРКА МОДЕЛИ ПРЯМОЙ БАЛКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ПЕРЕДАЧИ МОМЕНТА

После расчета по модели прямой балки каждого сегмента моменты на обоих концах каждого шарнира различны. Поэтому для уравновешивания моментов требуется следующий этап, и расчет становится итерационным. Такой процесс можно назвать балансировкой, и проводится он с учетом изгибающего момента.

#### 3.1 Пример расчета

При сегментном расчете прямые балки каждого сегмента жестко соединены с заделкой. При использовании метода передачи моментов соединения ослабляются последовательно в одном направлении таким образом, что изгибающие моменты с обеих сторон каждого шарнира естественным образом уравновешиваются. Если равновесие не достигается, то метод передачи моментов можно использовать несколько раз. Поскольку в процессе балансировки вычисляется алгебраическая сумма с двух сторон каждого шарнира, начиная с большего изгибающего момента и переходя к меньшему, то скорость сходимости будет выше, по сравнению с началом со стороны с меньшим изгибающим моментом [16]. Постепенное уменьшение количества дисбаланса, добавляемого следующими узлами, помогает ускорить сходимость. Поскольку изгибающий момент симметричного сечения больше, сходимость происходит быстрее, начиная с симметричного сечения, как показано на рис. 3-1. Алгоритм вычислений показан на рис. 3-2[16].

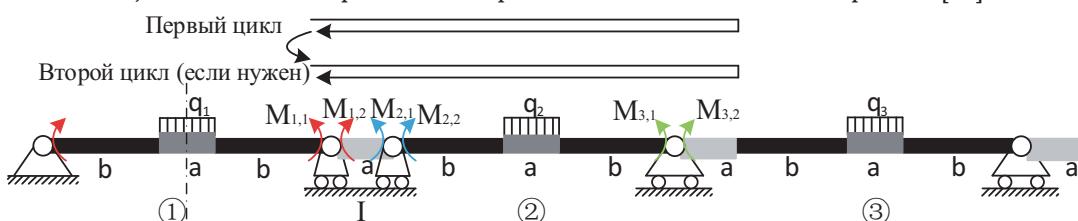


Рис. 3.1. Принципиальная схема итерационного расчета балок 1,2 и 3

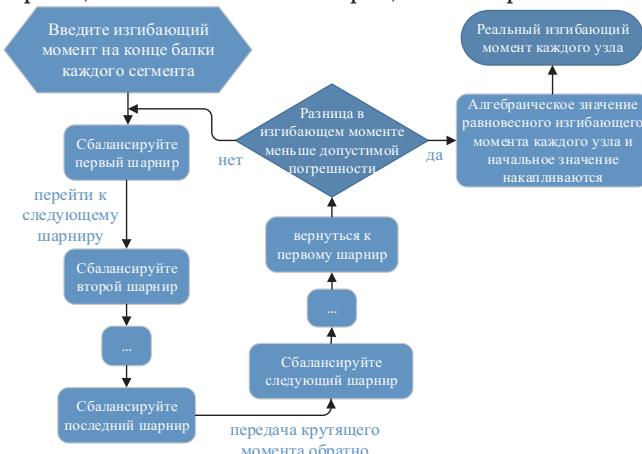


Рис. 3-2. Схема работы метода передачи изгибающего момента

В качестве примера расчета схема для расчета баланса каждого узла показана на рис.3-3. Эта схема соответствует классическому методу трех моментов [14,15] в форме, предложенной в работе [12], где эти моменты названы передаточными.

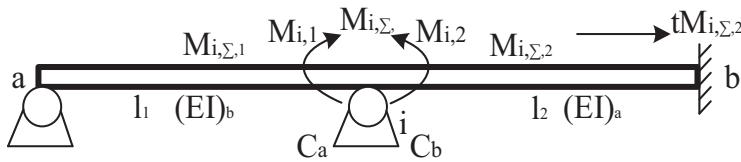


Рис. 3-3. Принципиальная схема расчета баланса каждого узла

Поскольку изгибающий момент, участвующий в расчете прогиба, противоположен моменту внешней силы, то изгибающий момент на шарнире противоположен алгебраической сумме момента, приложенного снаружи. Чтобы уравновесить два изгибающих момента  $M_{i,1}$  и  $M_{i,2}$ , заблокированный шарнир создает соответствующий балансирующий момент  $M_{i,\Sigma}$ .

Внешний момент для шарнира  $i$  здесь представляет собой изгибающие моменты  $M_{i,1}$  и  $M_{i,2}$  в конечных точках прямых балок с обеих сторон.

$$\begin{cases} M_{i,\Sigma} = -(M_{i,1} + M_{i,2}) \\ M_{i,\Sigma,1} = \frac{c_a}{c_a+c_b} M_{i,\Sigma} \\ M_{i,\Sigma,2} = \frac{c_b}{c_a+c_b} M_{i,\Sigma} \end{cases} .$$

Когда шарнир  $i$  разблокирован, изгибающие моменты  $M_{i,1}$  и  $M_{i,2}$  с обеих сторон узла складываются алгебраически:

$$\begin{cases} C_a = \frac{(EI)_a}{l_1} p_1 \\ C_b = \frac{(EI)_b}{l_2} p_2. \end{cases}$$

где  $C_a$  – вес распределения на стороне  $M_{i,1}$ , при распределении изгибающего момента  $M_{i,\Sigma}$ ,  $C_b$  – вес распределения на стороне  $M_{i,2}$ , при распределении изгибающего момента  $M_{i,\Sigma}$ ,  $p_1$  и  $p_2$  – константы распределения изгибающего момента [12].

Когда другой конец, начинающийся с узла, представляет собой шарнир, как, например, в левой части примера на рис. 4-3, то  $p_1 = 3$  [12]. Очевидно, что изгибающий момент, с другой стороны, равен 0. Тогда другой конец, начинающийся от узла, является фиксированным концом, как показано в правой части примера на рисунке 4-3, то  $p_2 = 4$  [12]. Если другая сторона представляет собой неподвижную конструкцию, соотношение весов между началом  $i$  и концом  $b$  составляет 4:2 [12], поэтому коэффициент изгибающего момента баланса на конце  $i$  для передачи на конец  $b$  равен  $v=0,5$ .

### 3.2 Процесс расчета

Из примеров можно получить весовые значения распределения момента по обе стороны трех шарниров (рис. 4-4), которые приведены в табл. 2.

Таблица 2. Величина весов распределения

$C_{11} = \frac{(EI)_1}{a+2b} \cdot 4 = 30,12$	$C_{21} = \frac{(EI)_{H+h}}{a} \cdot 4 = 259,57$	$C_{31} = \frac{(EI)_2}{a+2b} \cdot 4 = 30,12$
$C_{12} = \frac{(EI)_{H+h}}{a} \cdot 4 = 259,57$	$C_{22} = \frac{(EI)_2}{a+2b} \cdot 4 = 30,12$	$C_{32} = \frac{(EI)_3}{2a+2b} \cdot 3 = 19,58$

Полный процесс расчета показан на рис. 3-4, из которого видно, что после цикла изгибающий момент с обеих сторон шарнира уравновешен, и расчет окончен. Начальные значения изгибающих моментов получаются по уравнениям 2.1 и 2.13, при  $x=0$ ,  $|M_1| = \frac{37}{60} q_1 a^2 = M_0 = 0,50285 H \cdot m$ ,  $|M_2| = \frac{37}{60} q_2 a^2 = 0,40681 H \cdot m$ ,

$$|M_3| = M_A = \int_{a+b}^{2a+b} q_3 x dx - F_R (2a + 2b) = \frac{295}{288} q_3 a^2 = 0,16414 H \cdot m$$

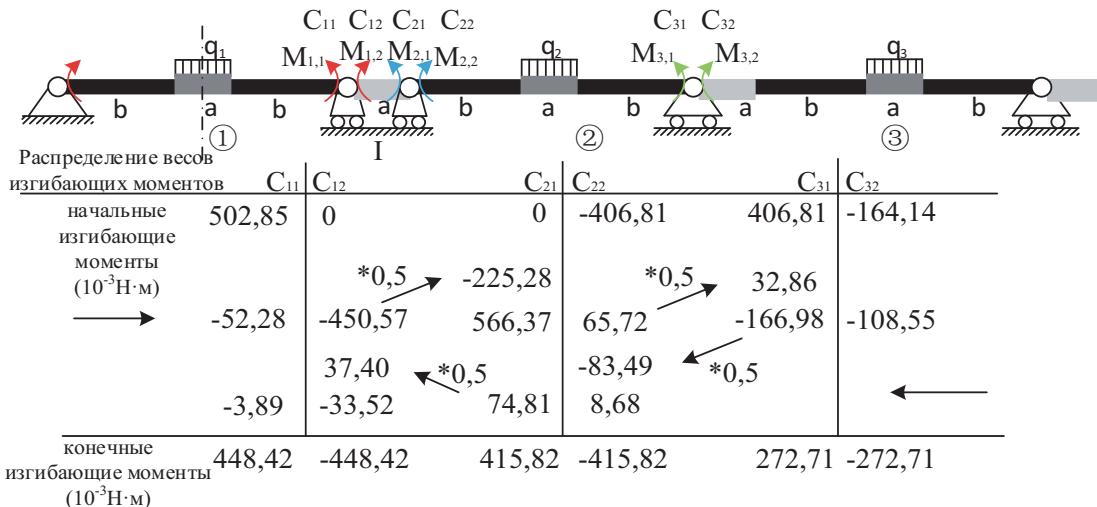


Рис. 3-4. Процесс расчета баланса моментов

Процесс расчета считается законченным, когда изгибающие моменты на обоих концах шарниров уравновешиваются. При этом равновесие можно считать полным. Результирующие изгибающие моменты в табл.3.

Таблица 3. Результирующие изгибающие моменты ( $*10^3 \text{Н}\cdot\text{м}$ )

$M_{11} = 448,4$	$M_{21} = 415,8$	$M_{31} = 272,7$
$M_{12} = -448,4$	$M_{22} = -415,8$	$M_{32} = -272,7$

Поскольку изгибающие моменты на конце звеньев были изменены, соответствующие распределенные нагрузки также изменились. На рис. 3-5 показана расчетная схема реальных сил для симметричной балки. После того, как изгибающие моменты уравновешены, начальные значения изгибающего момента изменяются, поэтому изменяется и распределенная нагрузка  $q_1$ , записываемая как  $q_{1c}$ .

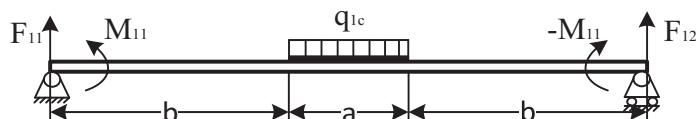


Рис. 3-5. Расчетная схема реальных сил симметричной балки

Распределенная нагрузка, изгибающий момент на конце стержня и сила реакции опоры изменяются пропорционально, что можно оценить моментным фактором  $\phi_1 = M_{11}/M_0 = 0,88577$ , поэтому  $q_{1c} = q_1\phi_1 = 30,745 \cdot 0,88577 = 27,233 \text{H/mm}$ ,  $F_{1c} = q_{1c}a = 140,25 \text{H}$ .

Для прямой балки, описанной в разделе 3.3, используется аналогичный метод и можно использовать исходную модель, показанную на рис.3-6. Начальное значение изгибающего момента изменяется, поэтому изменяется распределенная нагрузка  $q_3$ , записываемая как  $q_{3c}$ .

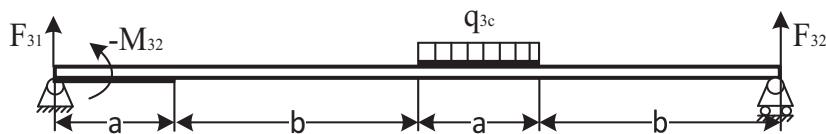


Рис. 3-6. Реальная силовая схема балки ③

Моментный фактор в этом случае будет равен  $\phi_3 = M_{32}/M_A = 1,77946$ , поэтому для распределенной нагрузки и силы получим следующие значения:

$$q_{3c} = q_3\phi_3 = 2,987 \cdot 1,77946 = 5,315 \text{H/mm}, F_{3c} = q_{3c}a = 27,37 \text{H}.$$

Расчет второй прямой балки ② более сложен, поскольку  $M_{22} \neq M_{31}$ , и система становится не-

симметричной, как показано на рис.3-7. Начальные значения изгибающего момента изменяются, поэтому изменяется распределенная нагрузка  $q_2$ , записываемая как  $q_{2c}$ .

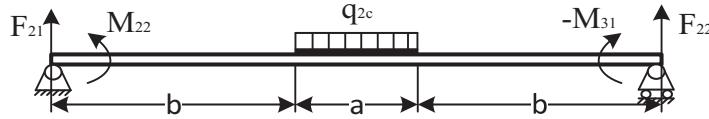


Рис. 3-7. Силы реакции второй прямой балки (2)

Моменты  $M_{22}$  и  $M_{31}$  определены ранее и равны  $M_{22} = -0,41582 H \cdot m$ ,  $M_{31} = 0,27271 H \cdot m$ . Имеются две неизвестные силы реакции и одна неизвестная распределенная нагрузка, поэтому далее приведены три уравнения для силы, момента и отклонения. Уравнения отклонения определяются вертикальным смещением правой точки опоры.

$$\begin{cases} F_{21} + F_{22} = q_{2c}a \\ F_{22} \cdot l + \sum M + q_{2c}(\frac{1}{2}a^2 + ab) = 0 \\ (\frac{1}{3}F_{22}l^3 + \frac{1}{2}(-M_{31})l^2 + y_q)/(EI)_2 = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

где  $\sum M = M_{22} - M_{31}$ ,  $l = 2b + a = 5a$ ,  
 $b = 2ay_q = -(\frac{1}{2}a^2 + ab)\frac{1}{2}q_{2c}l^2 + \frac{1}{6}(q_{2c}a)l^3 - \frac{1}{24}q_{2c}(l-b)^4 + \frac{1}{24}q_{2c}(l-a-b)^4 =$   
 $-\frac{315}{24}q_{2c}a^4/(EI)_2$ .

Решая эту систему уравнений, получим искомые неизвестные величины  $q_{2c} = 22452,7 H \cdot m$ ,  $F_{2c} = q_{2c}a = 115,63 H$  и  $F_{22} = 52,4 H$ ,  $F_{21} = 62,23 H$ .

### 3.3 Расчет жесткости

После получения нагрузок  $F_{1c}$ ,  $F_{2c}$  и  $F_{3c}$  на каждый выступ их можно просуммировать по всей верхней полуокружности, чтобы получить силу реакции, воспринимаемую внутренним кольцом, когда значение смещения равно 70 мкм. Общая сила показана на рис.3-8.

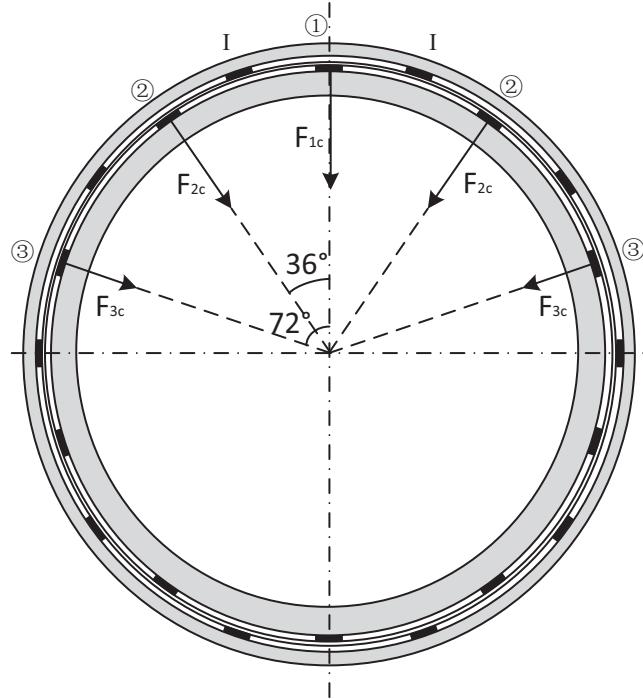


Рис. 3-8. Общая диаграмма сил

$$F_c = F_{1c} + 2 \cdot F_{2c} \cdot \cos(36^\circ) + 2 \cdot F_{3c} \cdot \cos(72^\circ) = 344,26 H, k = F_c/70 \text{ мкм} = 4,918 \cdot 10^6 H/m.$$

Если рассчитать силу каждой балки без расчета баланса, то получим следующее значение:

$$F_0 = F_1 + 2 \cdot F_2 \cdot \cos(36^\circ) + 2 \cdot F_3 \cdot \cos(72^\circ) = 375,13H.$$

Полученный результат примерно на 10 % больше, чем сбалансированная сила реакции. Это можно объяснить тем, что часть энергии деформации преобразуется в упругую потенциальную энергию оставшейся части между прямыми балками, поэтому она не может быть полностью отражена в силе реакции прямых балок.

При расчете в среде ANSYS сила реакции получается равной 400,41Н. Если предположить, что это истинное значение, то разница составит:

$$\varepsilon_y = (F_c - F_y)/F_y = (344,26 - 402,49)/402,49 = -14,47\%.$$

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработана методика определения жесткости упругих демпферных колец, представляющая собой комбинацию расчета балки и метода передачи моментов, что позволило существенно сократить время расчета. Упругое кольцо моделировалось неразрезной многоопорной прямой балкой для приближенного расчета. При расчете неразрезных прямых балок использовались методы решения статически неопределеных задач, что позволило приблизить результаты расчета к результатам цифрового моделирования.

При анализе упругого кольца было проведено сравнение разработанной методики с численным расчетом в среде ANSYS. Значение величины реакции составило  $F_y=402,5$ Н. Отклонение сравнительно с разработанной методикой не превысило 15%.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белоусов, А.И. Теория и проектирование гидродинамических демпферов опор роторов: Монография / А.И. Белоусов,, В.Б. Балаякин,, Д.К. Новиков. – Самара: Издательство Самарского научного центра РАН, 2002. – 335 с.
2. Хронин, Д.В. Конструкция и расчет демпферных опор роторов ГТД [Текст]: учебное пособие /Д.В. Хронин, М.К. Леонтьев, Е.В. Борзыко. – М.: Изд-во МАИ, 1988. – 44 с.
3. Леонтьев, М.К. Исследование характеристик упругих колец в опорах роторов газотурбинных двигателей / М.К.Леонтьев, А.Г. Терешко // Вестник МАИ. – 2011. – Т.18. – № 3. – С. 135-146.
4. Кутаков, М.Н. Математические модели гидродинамических демпферов в задачах роторной динамики газотурбинных двигателей / М.Н. Кутаков, С.А. Дегтярев, М.К. Леонтьев // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. – 2017. – Т. 16. – № 1. – С. 115-128. DOI: 10.18287/2541-7533-2017-16-1-115-128.
5. Дилигенский, Д.С. Разработка методики оценки параметров посадки упругих колец демпфера опоры ротора / Д.С. Дилигенский, Д.К. Новиков, В.А. Печенин, М.А. Болотов // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2020. – №1. – С. 44-50.
6. Diligenskii, D.S. Designing a technique for estimating press fit parameters of elastic rings for a rotor bearing damper / D.S. Diligensky, D.K. Novikov, V.A. Pechenin, M.A. Bolotov // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2020. – V.49. – Iss.7. – P. 618-623. DOI: 10.3103/S1052618820070067.
7. Wang, Zhenlin, Dynamic characteristics of elastic ring squeeze film damper [Text] / Zhenlin Wang, Zhansheng Liu, Guanghui Zhang – Industrial Lubrication and Tribology, 2019. DOI: 10.1108/ILT-04-2019-0125.
8. Jing, Sun. A Simple Method to Solve the Problem of Beam deformed - Strange Function / Sun Jing // Журнал Хуайнаньского профессионально-технического колледжа. 2004. Т. 4. №. 3. С. 100-101.
9. Дилигенский, Д.С. Определение статической жёсткости упругих колец демпфера / Д.С. Дилигенский, Д.К. Новиков, К.В. Бояров // Вестник Самарского университета Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. – 2021. – Т. 20. – № 4. – С. 69-78. – DOI:10.18287/ 2541-7533-2021-20-4-69-78.
10. Артемов, Е.А, Экспериментальное и расчётное определение податливости упругих опор турбомашин / Е.А. Артемов // Известия вузов. Авиационная техника. – 1965. – № 2. – С. 48-55.
11. Вайсфельд, А.А. Основы строительной механики / А.А. Вайсфельд. – М., 2003. – С. 58.
12. Пэйцзы, Вей. Метод расчета метода распределения изгибающих моментов при проектировании неразрезных фундаментных балок / Вей Пэйцзы // Строительство в Китае. – 2015. – №. 6. – С. 90-93.
13. Ло, Ч. Разработка эквивалентной модели демпферного кольца с учётом упругого контакта по выступам / Ч. Ло, Д.К. Новиков, Д.С. Дилигенский // Динамика и вибраакустика. – 2024. – Т. 10. № 1. – С. 21-28.
14. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев. – М., Наука, 1972. – 544 с.
15. Беляев, Н.М. Сопротивление материалов / Н.М. Беляев. – М.. Наука, 1976. – 608 с.
16. Сун, Ц. Простой метод определения деформации балки – метод сингулярных функций / Ц. Сун // Журнал Хуайнаньского профессионально-технического колледжа. – 2004. – Т. 4. – №. 3. – С. 100-101.

**DEVELOPMENT OF AN ANALYTICAL MODEL  
OF AN ELASTIC RING WITH PROTRUSIONS AS A MULTI-SUPPORT BEAM**

© 2025 Lo Cheng

Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov, Samara, Russia

The article is devoted to the assessment of the static stiffness of an elastic ring in hydrodynamic dampers, which are often used in the supports of aircraft gas turbine engines (GTE) to reduce rotor vibration. The paper presents an original method for assessing this characteristic. An elastic damper ring is modeled by a set of straight beams connected by hinges. To calculate the real reactive force arising from contact along the protrusions of the elastic rings, the transfer moment method is used. Stiffness is defined as the vector sum of the forces arising in all working areas. The practical significance of the work is that the developed method can be used for analytical evaluation of the rigidity of the engine support taking into account the influence of the friction coefficient.

**Keywords:** elastic ring, damper, rigidity, beam model.

DOI: 10.37313/1990-5378-2025-27-1-127-138

EDN: VPWQEA

**REFERENCES**

1. *Belousov, A.I. Teoriya i proektirovanie gidrodinamicheskikh dempferov opor rotorov: Monografiya / A.I. Belousov, V.B. Balyakin, D.K. Novikov. – Samara: Izdatel'stvo Samarskogo nauchnogo centra RAN, 2002. – 335 s.*
2. *Hronin, D.V. Konstrukciya i raschet dempfernnyh opor rotorov GTD [Tekst]: uchebnoe posobie /D.V. Hronin, M.K. Leont'ev, E.V. Borzdyko. – M.: Izd-vo MAI, 1988. – 44 c.*
3. *Leont'ev, M.K. Issledovanie harakteristik uprugih kolec v oporah rotorov gazoturbinnyh dvigatelej / M.K.Leont'ev, A.G. Tereshko // Vestnik MAI. – 2011. – T.18, №3. – S. 135-146.*
4. *Kutakov, M.N. Matematicheskie modeli gidrodinamicheskikh dempferov v zadachah rotornoj dinamiki gazoturbinnyh dvigatelej / M.N. Kutakov, S.A. Degtyarev, M.K. Leont'ev // Vestnik Samarskogo universiteta. Aerokosmicheskaya tekhnika, tekhnologii i mashinostroenie. – 2017. – T. 16, №1. – S. 115-128. DOI: 10.18287/2541-7533-2017-16-1-115-128.*
5. *Diligenskij, D.S. Razrabotka metodiki ocenki parametrov posadki uprugih kolec dempfera opory rotora / D.S. Diligenskij, D.K. Novikov, V.A. Pechenin, M.A. Bolotov // Problemy mashinostroeniya i avtomatizacii. – 2020. – №1. – S. 44-50.*
6. *Diligenskii, D.S. Designing a technique for estimating press fit parameters of elastic rings for a rotor bearing damper / D.S. Diligensky, D.K. Novikov, V.A. Pechenin, M.A. Bolotov // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2020. – V.49. – Iss.7. – P. 618-623. DOI: 10.3103/S1052618820070067.*
7. *Wang, Zhenlin. Dynamic characteristics of elastic ring squeeze film damper [Text] / Zhenlin Wang, Zhansheng Liu, Guanghui Zhang – Industrial Lubrication and Tribology, 2019. DOI: 10.1108/ILT-04-2019-0125.*
8. *Jing, Sun. A Simple Method to Solve the Problem of Beam deformed - Strange Function / Sun Jing // Zhurnal Huajnan'skogo professional'no-tehnicheskogo kolledzha. 2004. T. 4. No. 3. S. 100-101.*
9. *Diligenskij, D.S. Opredelenie staticheskoy zhyostkosti uprugih kolec dempfera / D.S. Diligenskij, D.K. Novikov, K.V. Boyarov // Vestnik Samarskogo universiteta Aerokosmicheskaya tekhnika, tekhnologii i mashinostroenie. – 2021. – T. 20. – № 4. – C. 69-78. – DOI:10.18287/ 2541-7533-2021-20-4-69-78.*
10. *Artemov, E.A. Eksperimental'noe i raschyotnoe opredelenie podativnosti uprugih opor turbomashin / E.A. Artemov // Izvestiya vuzov. Aviacionnaya tekhnika. – 1965. – № 2. – S. 48-55.*
11. *Vajsfel'd, A.A. Osnovy stroitel'noj mekhaniki / A.A. Vajsfel'd. – M., 2003. – S. 58.*
12. *Pejczy, Vej. Metod rascheta metoda raspredeleniya izgibayushchih momentov pri proektirovaniyu nerazreznyh fundamentnyh balok / Vej Pejczy // Stroitel'stvo v Kitae. – 2015. – No. 6. – C. 90-93.*
13. *Lo, Ch. Razrabotka ekvivalentnoj modeli dempfernogo kol'ca s uchyotom uprugogo kontakta po vystupam / Ch. Lo, D.K. Novikov, D.S. Diligenskij // Dinamika i vibroakustika. – 2024. – T. 10. № 1. – S. 21-28.*
14. *Feodos'ev, V.I. Soprotivlenie materialov / V.I. Feodos'ev. – M., Nauka, 1972. – 544 s.*
15. *Belyaev, N.M. Soprotivlenie materialov / N.M. Belyaev. – M.. Nauka, 1976. – 608 s.*
16. *Sun, C. Prostoj metod opredeleniya deformacii balki – metod singulyarnyh funkciij / C. Sun//Zhurnal Huajnan'skogo professional'no-tehnicheskogo kolledzha. – 2004. – T. 4. – №. 3. – S. 100-101.*