

УДК 532.59 : 532.595 : 533

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОГЛОЩЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО БОЛЕЕ СИЛЬНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНОЙ БОЛЕЕ СЛАБОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ С ПОМОЩЬЮ ПОЛУЛАГРАНЖЕВОГО ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА ГОДУНОВА БЕЗ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ВЯЗКОСТИ ДЛЯ УДАРНЫХ ВОЛН

© 2024 В.В. Никонов

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева,
г. Самара, Россия

Статья поступила в редакцию 10.09.2024

В этой статье предлагается модифицированный полулагранжевый численный метод предыдущей опубликованной работы автора и рассматривается его применение к задачам поглощения более сильной ударной волной более слабой ударной волны. Известно, что одним из недостатков методов типа Эйлера с высоким разрешением для точного разрешения масштабов плавного потока и одновременным выявлением разрывов является численная вязкость на ударных волнах. При прохождении ударной волны параметры потока резко изменяются на расстоянии, равном длине свободного пробега молекулы газа, что значительно меньше размера ячейки расчетной сетки. Из-за численной вязкости вышеупомянутые методы типа Эйлера растягивают изменение параметров ударной волны на несколько ячеек сетки. Поэтому в предыдущих работах автора был предложен полулагранжев метод Годунова без численной вязкости для ударных волн. В этом методе решаются одномерные уравнения Эйлера, но они разбиваются на части, описывающие конвекцию и акустические процессы отдельно с соответствующими разными шагами по времени. При этом дополнительно используется итерационный точный решатель Годунова, поскольку инварианты Римана не сохраняются для умеренных и сильных скачков в идеальном газе. Данный итерационный решатель определяет точность предлагаемого метода для разрывов потока. В расчетах использовалось условие завершения итераций при достижении разницы давлений между текущей и предыдущей итерациями менее 10^{-5} . Предлагаемый здесь метод относится к группе методов частиц в ячейке - particle-in-cell (PIC). Насколько известно автору, на момент выхода его первой статьи в 2011 г., посвященной данному методу, подобных численных схем PIC, использующих итерационный точный решатель Годунова, не существовало. В ударных волнах для предложенного метода свойства течения изменяются мгновенно (с точностью, зависящей от размера ячейки сетки). В предыдущей работе автора от 2024 г. была предложена единая формула распределения плотности для волны разрежения, в то время, как в статье автора 2022 г. использовался линейный закон распределения параметров течения при моделировании задачи Шу и Ошера с целью снижения паразитных колебаний и нелинейный закон, полученный из инвариантов Римана, для остальных тестовых задач. В данной работе предлагается дальнейшее развитие численной схемы метода, описанного в предыдущей статье автора 2024 г., а именно очередная модификация метода для моделирования сильных ударных волн и его применение для задачи поглощения более сильной ударной волной более слабой ударной волны. Результаты численного анализа для двух тестовых задач сравниваются с данными статьи автора от 2022 г. и с результатами схемы Total Variation Diminishing (TVD), предложенной Хартемом. К сожалению, получение точных решений для рассмотренных задач затруднительно.

Ключевые слова: газ, ударная волна, задача Римана, метод Годунова, подход Лагранжа, численная вязкость

DOI: 10.37313/1990-5378-2024-26-6-185-199

EDN: MCFUNM

ВВЕДЕНИЕ

Моделирование сжимаемых течений является сложной задачей из-за наличия разрывов, например ударных и контактных волн, а также широкополосных масштабов непрерывного течения. Было предложено множество схем с высоким разрешением для точного определения

Никонов Валерий Владимирович, кандидат технических наук, доцент кафедры конструкции и проектирования летательных аппаратов. E-mail: nikonov.vv@ssau.ru

параметров плавного потока и одновременного выявления разрывов: метод искусственной вязкости [1, 2], метод уменьшения полной вариации (TVD) [3], существенно бесколебательная схема (ENO) [4] и взвешенная существенно бесколебательная схема (WENO) [5].

Метод ENO изучался Хартемом и др. в работах [4, 6–8]. Это был первый успешный метод высокого порядка для пространственной дискретизации гиперболических законов сохранения, обладающий свойством ENO. Такое

свойство считается очень полезным при численном моделировании гиперболических законов сохранения, поскольку численные методы высокого порядка часто вызывают паразитные колебания, особенно вблизи скачков или других разрывов. Пространственная дискретизация ENO конечного объема изучалась в [4], где было показано, что она имеет равномерную точность высокого порядка вплоть до местоположения любого разрыва. Позже Шу и Ошер [9, 10] разработали метод конечных разностей ENO. Основная идея метода ENO заключается в выборе трафарета точек интерполяции, позволяющего избежать появления колебаний. То есть выбирается шаблон, на котором решение меняется наиболее плавно, а затем аппроксимируется поток на границах ячеек с высоким порядком точности, избегая тем самым больших паразитных колебаний, вызванных интерполяцией данных через разрывы.

Позже методы WENO были представлены в [5, 11, 12] для устранения потенциальной численной неустойчивости при выборе трафаретов ENO. Методы WENO используют выпуклую комбинацию всех шаблонов-кандидатов ENO. Другими словами, методы WENO достигают более высокого порядка точности, чем методы ENO, в гладких областях, сохраняя при этом свойство ENO на разрывах.

Все упомянутые выше методы используют подход Эйлера рассмотрения движения сжимаемой сплошной среды. Одним из недостатков методов [1-13] является большая численная вязкость на ударных волнах. Существуют методы [14-17], использующие точный решатель Римана, но являющиеся также методами Эйлера. Они тоже имеют численную вязкость на скачках уплотнения. Для решения этой проблемы Годунов и др. [14] предлагали использовать подвижные сетки, что существенно усложняет задачу, особенно при переходе к рассмотрению двумерных и трехмерных областей течения. Для сильно разреженных газов, в частности, применяется метод прямого моделирования Монте-Карло (DSMC), в численной схеме которого [18] используется факт о мгновенном изменении параметров течения на ударных волнах.

В работе [19] автором данной статьи был предложен метод, использующий подход Лагранжа к рассмотрению движения сжимаемой сплошной среды, и фиксированную однородную сетку. Позже в [20] была описана реализация граничных условий для твердой стенки. В этих работах было показано, что у данного метода отсутствует численная вязкость на ударных волнах. В статье автора [21] предлагалась модификация метода, заключающаяся в изменении формулы, по которой рассчитывается плотность сплошной среды для волн разрежения. Было

установлено, что данная формула позволяет получать хорошие результаты для всех видов тестовых задач, решенных в [19], [20]. В то время, как в работе [20] для получения успешных результатов использовались две разные формулы: линейный закон распределения параметров потока в волне разрежения для задачи Шу и Ошер об ударной трубе [22] и нелинейный закон из [19] для остальных рассмотренных задач. В данной работе предлагается дальнейшая модификация метода, описанного в [19], [20]. Нововведение заключается в учете дополнительного условия о направлении ударной волны на этапе расчёта подшага акустики. При этом данное новшество, внесенное в схему метода, не влияет на результаты уже рассмотренных в [19-21] тестовых задач, а проявляется только при численном решении второй тестовой задачи с более сильной ударной волной, приведенной в данной работе.

1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И ИДЕЯ МЕТОДА

Уравнения Эйлера, описывающие одномерную задачу движения сжимаемой сплошной среды, в размерных переменных имеют вид [13]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{p}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь u – скорость, ρ – плотность, ε – внутренняя удельная энергия, p – давление, x – координата, t – время.

Система уравнений (1) замыкается с помощью уравнения состояния для идеального газа

$$p = (\kappa - 1) \rho \varepsilon, \quad (2)$$

где κ – показатель адиабаты.

Годунов [14] предложил итерационный решатель Римана, реализованный в конечно-разностной схеме. Другими исследователями позднее использовался метод контрольного объема. Напротив, мы используем подход Лагранжа.

Как и в предыдущих статьях [19-21], в данной работе предлагается следующий метод: этапы конвекции и акустики рассматриваются отдельно, разбиение на физические процессы производится потому, что локальная акустическая скорость (скорость звука) может сильно отличаться от конвективной скорости потока. Таким образом, на акустическом этапе решается система

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{p}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

и уравнение (2). Система (3) получается из (1) отбрасыванием конвективных членов и может быть представлена в матричной форме следующим образом:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

где $[A]$ – матрица Якоби, имеющая вид

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & \rho & 0 \\ (\kappa-1)\varepsilon & 0 & \kappa-1 \\ \rho & 0 & 0 \\ 0 & (\kappa-1)\varepsilon & 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Матрица $[A]$ может быть представлена в форме

$$[A] = [R][\Lambda][L], \quad (6)$$

где $[\Lambda]$ – диагональная матрица собственных значений матрицы Якоби (5)

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} -c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Здесь c – скорость звука

$$c = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}}. \quad (8)$$

Матрица соответствующих левых собственных векторов $[L]$ определяется как

$$[L] = \begin{bmatrix} -\frac{c}{\kappa\rho} & 1 & -\frac{\kappa-1}{c} \\ 1 & 0 & -\frac{\kappa\rho}{c^2} \\ \frac{c}{\kappa\rho} & 1 & \frac{\kappa-1}{c} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

а матрица правых собственных векторов $[R]$ будет равна

$$[R] = \begin{bmatrix} -\frac{\rho}{2c} & \frac{\kappa-1}{\kappa} & \frac{\rho}{2c} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{c}{2\kappa} & -\frac{(\kappa-1)\varepsilon}{\kappa\rho} & \frac{c}{2\kappa} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Так как

$$[L][R] = [E], \quad (11)$$

где $[E]$ – единичная диагональная матрица. Умножение системы уравнений (4) слева на матрицу $[L]$ и использование уравнения (11) даёт

$$[L] \begin{Bmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \end{Bmatrix} = [\Lambda][L] \begin{Bmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \end{Bmatrix}. \quad (12)$$

Если $[L] = [\text{const}]$, мы можем получить из (12) характеристическую форму

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial t} - c \frac{\partial w_1}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial w_2}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial w_3}{\partial t} + c \frac{\partial w_3}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} w_1 &= -\frac{c^*}{\kappa\rho^*} \rho + u - \frac{\kappa-1}{c^*} \varepsilon, \\ w_2 &= \rho - \frac{\kappa\rho^*}{c^{*2}} \varepsilon, \\ w_3 &= \frac{c^*}{\kappa\rho^*} \rho + u + \frac{\kappa-1}{c^*} \varepsilon. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь звездочка указывает на постоянные значения. Уравнение (13) описывает движение двух волн со скоростями $-c$ и c , и их соответствующими значениями переноса w_1 и w_3 (14).

Систему уравнений (13) можно решить, используя предложенный лагранжев подход. Однако в этой статье мы используем точный решатель Годунова для решения полной нелинейной системы (1), (2), а затем вычитаем конвективную скорость из решения, чтобы получить решение уравнения (3). Более подробное описание метода приводится ниже.

Шаг по времени Δt_c на этапе акустики выбирался согласно критерию Куранта:

$$\Delta t_c = k_c \frac{h}{c_s}, \quad (15)$$

где c_s – акустическая скорость ударной волны, а k_c – целое число. Если, например, $k_c = 3$, тогда ударная волна распространяется на три ячейки сетки на подшаге акустики.

На этапе конвекции решаем систему только с конвективными членами

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

также как систему уравнений (13).

Шаг по времени на стадии конвекции выбирался аналогичным (15) образом:

$$\Delta t_u = k_u \frac{h}{u_s}, \quad (17)$$

где u_s – конвективная скорость ударной волны, а k_u – тоже целое число. Например, если $k_u = 2$, тогда ударная волна распространяется на две ячейки сетки на подшаге конвекции. Если $\Delta t_c \neq \Delta t_u$, тогда маршевый шаг Δt выбирается, как

$$\begin{aligned} \Delta t_c &= n_c \Delta t, \\ \Delta t_u &= n_u \Delta t, \end{aligned} \quad (18)$$

где n_c и n_u – целые числа.

2. СХЕМА МЕТОДА ДЛЯ ЭТАПА «АКУСТИКИ»

На этапе акустики решается система уравнений (3). Хотя мы не можем для нелинейных случаев получить систему волновых уравнений типа (13), фундаментальные свойства решения линейной системы (13) сохраняются и для решения нелинейной системы (3). Решениями для нелинейной системы являются ударная волна или волна разрежения [14], как и для линейной системы. К сожалению, мы не знаем переменных w_1 и w_3 для нелинейной системы (3), но знаем точное решение задачи Римана с помощью метода Годунова [14] для нелинейной системы (1), (2). Обозначим это решение большими переменными: R_L и R_R – плотность, $U_L = U_R$ – скорость, E_L и E_R – внутренняя удельная энергия, $P_L = P_R$ – давление, и D_L и D_R – скорости распространения ударной волны или волны разрежения, где индексы L и R обозначают левую и правую области от границы между ячейками соответственно.

В предлагаемом методе переменные w_1 и w_3 (14) заменяются на переменные $\overline{w}_1 = \{P_L, U_L, R_L, E_L\}$ и $\overline{w}_3 = \{P_R, U_R, R_R, E_R\}$, которые переносятся с локальными акустическими скоростями $C_L = D_L - U_L$ и $C_R = D_R - U_R$, соответственно.

Сначала нам нужно решить задачу Римана с помощью метода Годунова [14] для каждой пары ячеек (i и $i+1$) с данными $(\{p_i, u_i, \rho_i, \varepsilon_i\}$

и $\{p_{i+1}, u_{i+1}, \rho_{i+1}, \varepsilon_{i+1}\}$) соответственно. В результате получаются значения больших переменных $\{P, U, R_L, E_L, D_L, R_R, E_R, D_R\}$, которые присваиваются ячейкам сетки следующим образом:

$$\begin{aligned} P_{L_{i+1}}^{k-1} &= P, \quad U_{L_{i+1}}^{k-1} = U, \quad R_{L_{i+1}}^{k-1} = R_L, \\ E_{L_{i+1}}^{k-1} &= E_L, \quad C_{L_{i+1}}^{k-1} = D_L - U, \end{aligned} \quad (19)$$

которые представляют собой вектор \overline{w}_1 волны, распространяющейся в отрицательном направлении оси x (влево), и:

$$\begin{aligned} P_{R_i}^{k-1} &= P, \quad U_{R_i}^{k-1} = U, \quad R_{R_i}^{k-1} = R_R, \\ E_{R_i}^{k-1} &= E_R, \quad C_{R_i}^{k-1} = D_R - U, \end{aligned} \quad (20)$$

которые представляют собой вектор волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси x (вправо). В случае волны разрежения переменная D задает скорость более медленной характеристики волны разрежения. Например, для правой волны разрежения D_R задается следующим образом:

$$D_R = U + c_{i+1} - \frac{(\kappa-1)}{2}(u_{i+1} - U), \quad (21)$$

где c_{i+1} – скорость звука для $i+1$ ячейки сетки определяется по формуле (8). Для левой волны разрежения D_L определяется как

$$D_L = U - c_i - \frac{(\kappa-1)}{2}(u_i - U). \quad (22)$$

Рассмотрим волну, распространяющуюся вдоль положительного направления оси x (вправо). Ячейки сетки рассматриваются парами. Координаты ячеек после переноса на этапе акустики для правой волны \overline{w}_3 определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_i + C_{R_i}^{k-1} \Delta t_c, \\ x_2 &= x_{i+1} + C_{R_{i+1}}^{k-1} \Delta t_c. \end{aligned} \quad (23)$$

Решение задачи ищется в следующем виде:

1) Если удовлетворяются условия

$$\left| P_{R_{i+1}}^{k-1} - P_{R_i}^{k-1} \right| < \epsilon_1, \quad \left| C_{R_{i+1}}^{k-1} - C_{R_i}^{k-1} \right| < \epsilon_1, \quad (24)$$

то для всех ячеек сетки, для которых условие $x_1 \leq x_j \leq x_2$ выполнено, решение в последующий момент времени k тривиально и может быть задано следующим образом:

$$\begin{aligned} P_{R_j}^k &= \frac{1}{2}(P_{R_i}^{k-1} + P_{R_{i+1}}^{k-1}), \quad U_{R_j}^k = \frac{1}{2}(U_{R_i}^{k-1} + U_{R_{i+1}}^{k-1}), \\ R_{R_j}^k &= \frac{1}{2}(R_{R_i}^{k-1} + R_{R_{i+1}}^{k-1}), \quad E_{R_j}^k = \frac{1}{2}(E_{R_i}^{k-1} + E_{R_{i+1}}^{k-1}). \end{aligned} \quad (25)$$

2) Если удовлетворяются условия

$$\left(C_{R_{i+1}}^{k-1} - C_{R_i}^{k-1} \right) < -\epsilon_1 \text{ и } (x_2 - x_1) > \epsilon_2, \quad (26)$$

тогда мы имеем слабый скачок, который не догоняет решение из ячейки впереди. И решение

записывается как:

$$\begin{aligned} P_{R_j}^k &= P_{R_i}^{k-1}, U_{R_j}^k = U_{R_i}^{k-1}, R_{R_j}^k = R_{R_i}^{k-1}, \\ E_{R_j}^k &= E_{R_i}^{k-1}, \text{ если } x_1 \leq x_j \leq (x_1 + x_2)/2; \\ P_{R_j}^k &= P_{R_{i+1}}^{k-1}, U_{R_j}^k = U_{R_{i+1}}^{k-1}, R_{R_j}^k = R_{R_{i+1}}^{k-1}, \\ E_{R_j}^k &= E_{R_{i+1}}^{k-1}, \text{ если } (x_1 + x_2)/2 < x_j \leq x_2. \end{aligned} \quad (27)$$

3) Если

$$(C_{R_{i+1}}^{k-1} - C_{R_i}^{k-1}) \geq e_1, \quad (28)$$

тогда,

3.1) если

$$(U_{R_{i+1}}^{k-1} - U_{R_i}^{k-1}) < e_1,$$

в этом случае мы имеем ударную волну.

3.1 а) Если

$$(U_{R_{i+1}}^{k-1} + U_{R_i}^{k-1}) \geq 0,$$

- то, если

$$(x_1 - h/2) \leq x_j \leq (x_1 + h/2),$$

тогда

$$\begin{aligned} P_{R_j}^k &= P_{R_i}^{k-1}, U_{R_j}^k = U_{R_i}^{k-1}, \\ R_{R_j}^k &= R_{R_i}^{k-1}, E_{R_j}^k = E_{R_i}^{k-1}; \end{aligned} \quad (29)$$

- а если

$$(x_1 + h/2) < x_j \leq x_2,$$

тогда

$$\begin{aligned} P_{R_j}^k &= P_{R_{i+1}}^{k-1}, U_{R_j}^k = U_{R_{i+1}}^{k-1}, \\ R_{R_j}^k &= R_{R_{i+1}}^{k-1}, E_{R_j}^k = E_{R_{i+1}}^{k-1}; \end{aligned} \quad (30)$$

3.1 б) если

$$(U_{R_{i+1}}^{k-1} + U_{R_i}^{k-1}) < 0,$$

- то, если

$$(x_2 - h/2) \leq x_j \leq (x_2 + h/2),$$

тогда

$$\begin{aligned} P_{R_j}^k &= P_{R_{i+1}}^{k-1}, U_{R_j}^k = U_{R_{i+1}}^{k-1}, \\ R_{R_j}^k &= R_{R_{i+1}}^{k-1}, E_{R_j}^k = E_{R_{i+1}}^{k-1}; \end{aligned} \quad (31)$$

- а если

$$x_1 \leq x_j < (x_2 - h/2),$$

тогда

$$\begin{aligned} P_{R_j}^k &= P_{R_i}^{k-1}, U_{R_j}^k = U_{R_i}^{k-1}, \\ R_{R_j}^k &= R_{R_i}^{k-1}, E_{R_j}^k = E_{R_i}^{k-1}. \end{aligned} \quad (32)$$

Модификация предлагаемого в данной статье метода по сравнению с работой [21] заключается в ведении условий «3.1 а)» и «3.1 б)». В [21] вместо проверки этих условий просто вычислялись формулы (29), (30), а формулы (31), (32) не вычислялись.

3.2) Если

$$(U_{R_{i+1}}^{k-1} - U_{R_i}^{k-1}) \geq e_1,$$

тогда имеем волну разрежения и решение для $x_1 \leq x_j \leq x_2$ определяется из инвариантов Римана для уравнений Эйлера и имеет вид:

$$U_{R_j}^k = U_{R_i}^{k-1} + \frac{U_{R_{i+1}}^{k-1} - U_{R_i}^{k-1}}{x_2 - x_1} (x_j - x_1), \quad (33)$$

$$E_{R_j}^k = \left(\sqrt{E_{R_i}^{k-1}} + \frac{\sqrt{E_{R_{i+1}}^{k-1}} - \sqrt{E_{R_i}^{k-1}}}{x_2 - x_1} (x_j - x_1) \right)^2, \quad (34)$$

$$R_{R_j}^k = \left((R_{R_i}^{k-1})^{\frac{\kappa-1}{2}} + \frac{(R_{R_{i+1}}^{k-1})^{\frac{\kappa-1}{2}} - (R_{R_i}^{k-1})^{\frac{\kappa-1}{2}}}{x_2 - x_1} (x_j - x_1) \right)^{\frac{2}{\kappa-1}}, \quad (35)$$

$$P_{R_j}^k = (\kappa - 1) R_{R_j}^k E_{R_j}^k. \quad (36)$$

При выполнении условий 1)-3), если оказывается, что в ячейку сетки на данном подшаге уже было записано решение, то оно заменяется «новым», полученным из решения задачи о распаде разрыва. При этом уже записанное решение будет с индексом R, следующее решение, пришедшее в эту ячейку, будет с индексом L. Полученное «новое» решение берется из результата задачи Римана с индексом R. Кроме того, при записи решения в ячейки сетки также проверяется условие, чтобы распространение данных решений с местной «акустической» скоростью не обгоняло (не затирало) решение впереди идущей ударной волны, если таковая существует.

Для волны, бегущей в отрицательном направлении оси x (влево) и переносящей величины $\overline{w}_1 = \{P_L, U_L, R_L, E_L\}$, условия и выражения получаются аналогичным образом.

После перемещения левой и правой волн в каждой ячейке сетки мы имеем наборы величин $\overline{w}_1 = \{P_L^k, U_L^k, R_L^k, E_L^k\}$ и $\overline{w}_3 = \{P_R^k, U_R^k, R_R^k, E_R^k\}$, а также решение с прошлого подшага по времени $\{p^{k-1}, u^{k-1}, \rho^{k-1}, \varepsilon^{k-1}\}$, для которого три раза запускается решатель Римана. Первый раз для данных $\overline{w}_3 = \{P_R^k, U_R^k, R_R^k, E_R^k\}$ слева и $\{p^{k-1}, u^{k-1}, \rho^{k-1}, \varepsilon^{k-1}\}$ справа, полученное правое решение записывается в данные третьей задачи слева. Второй раз для данных $\{p^{k-1}, u^{k-1}, \rho^{k-1}, \varepsilon^{k-1}\}$ слева и $\overline{w}_1 = \{P_L^k, U_L^k, R_L^k, E_L^k\}$ справа, полученное левое решение записывается в данные третьей задачи справа. И третий раз для данных, указанных выше. В результате снова получаем значения «больших» переменных

$$\{P^{k*}, U^{k*}, R_L^{k*}, E_L^{k*}, R_R^{k*}, E_R^{k*}\}.$$

Так как давление и конвективная скорость не испытывают скачки в распаде разрыва, то их значения после этапа «акустики» определяются как

$$p_{\text{ни}}^k = P_i^{k*}, u_{\text{ни}}^k = U_i^{k*}. \quad (37)$$

Значения для плотности и энергии выбираются следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{ни}}^k &= R_{Ri}^{k*}, \varepsilon_{\text{ни}}^k = E_{Ri}^{k*}, \text{ если } U_i^{k*} \geq 0, \\ \rho_{\text{ни}}^k &= R_{Li}^{k*}, \varepsilon_{\text{ни}}^k = E_{Li}^{k*}, \text{ если } U_i^{k*} < 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Решение $\{p_c^k, u_c^k, \rho_c^k, \varepsilon_c^k\}$ этапа «акустики» получено.

3. СХЕМА МЕТОДА ДЛЯ ЭТАПА КОНВЕКЦИИ

На этапе конвекции решается система уравнений (2) и (16). В предлагаемом методе вектор величин $\{p_u^{k-1}, u_u^{k-1}, \rho_u^{k-1}, \varepsilon_u^{k-1}\} = \{p_c^k, u_c^k, \rho_c^k, \varepsilon_c^k\}$ переносится с местной конвективной скоростью u_c^k , то есть результаты расчета этапа «акустики» являются начальными данными для этапа конвекции. На этапе конвекции ячейки также рассматриваются попарно. Координаты ячеек после перемещения на этапе конвекции определяются как

$$\begin{aligned} x_1 &= x_i + u_{ui}^{k-1} t_u, \\ x_2 &= x_{i+1} + u_{ui+1}^{k-1} t_u. \end{aligned} \quad (39)$$

Далее мы опустим индекс u , понятно, что здесь переменные относятся к этапу конвекции.

Решения задачи на этапе конвекции отыскиваются в следующем виде:

$$\begin{aligned} 1) \text{ если выполняются условия} \\ |u_{i+1} - u_i| < e_1, |\rho_{i+1} - \rho_i| < e_1, \\ |\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i| < e_1, \end{aligned} \quad (40)$$

то для всех ячеек сетки, для которых выполняется условие $x_1 \leq x_j \leq x_2$, решение в следующий момент времени k будет тривиальным

$$\begin{aligned} p_j^k &= \frac{1}{2}(p_i^{k-1} + p_{i+1}^{k-1}), u_j^k = \frac{1}{2}(u_i^{k-1} + u_{i+1}^{k-1}), \\ \rho_j^k &= \frac{1}{2}(\rho_i^{k-1} + \rho_{i+1}^{k-1}), \varepsilon_j^k = \frac{1}{2}(\varepsilon_i^{k-1} + \varepsilon_{i+1}^{k-1}). \end{aligned} \quad (41)$$

При записи решения (41) в ячейки сетки отдельно проверяется условие, чтобы распространение данного решения со скоростью конвекции не обгоняло (не затирало) решение впереди идущей ударной волны, если таковая существует. Для этого в начале этапа конвекции определяются положения границ всех ударных волн в следующий момент времени.

$$2) \text{ Если выполняется условие} \\ (u_{i+1} - u_i) < e_1, \quad (42)$$

то имеем ударную волну.

$$2.1) \text{ Если} \\ (x_2 - x_1) > e_2, \quad (43)$$

то решение определится как:

$$\text{а) если} \\ x_1 \leq x_j \leq (x_1 + x_2)/2,$$

тогда

$$p_j^k = p_i^{k-1}, u_j^k = u_i^{k-1}, \rho_j^k = \rho_i^{k-1}, \varepsilon_j^k = \varepsilon_i^{k-1}; \quad (44)$$

б) если

$$(x_1 + x_2)/2 < x_j \leq x_2,$$

тогда

$$p_j^k = p_{i+1}^{k-1}, u_j^k = u_{i+1}^{k-1}, \rho_j^k = \rho_{i+1}^{k-1}, \varepsilon_j^k = \varepsilon_{i+1}^{k-1}; \quad (45)$$

2.2) если

$$(x_2 - x_1) \leq e_2, \quad (46)$$

тогда

$$\text{а) если} \\ |p_{i+1}^{k-1} - p_i^{k-1}| < e_1,$$

то сначала определяется граница разрыва

$$x = x_i + h/2 + (u_i^{k-1} + u_{i+1}^{k-1})_{\Delta} t_c, \quad (47)$$

затем в ячейку j слева от границы разрыва записывается решение

$$p_j^k = p_i^{k-1}, u_j^k = u_i^{k-1}, \rho_j^k = \rho_i^{k-1}, \varepsilon_j^k = \varepsilon_i^{k-1}, \quad (48)$$

а в ячейку $j+1$ справа от границы разрыва записываются величины

$$p_j^k = p_{i+1}^{k-1}, u_j^k = u_{i+1}^{k-1}, \rho_j^k = \rho_{i+1}^{k-1}, \varepsilon_j^k = \varepsilon_{i+1}^{k-1}, \quad (49)$$

б) если

$$|p_{i+1}^{k-1} - p_i^{k-1}| \geq e_1,$$

решение определится как

$$\text{- если} \\ p_i^{k-1} > p_{i+1}^{k-1} \text{ и } (x_1 - h/2) \leq x_j \leq (x_1 + h/2),$$

тогда

$$p_j^k = p_i^{k-1}, u_j^k = u_i^{k-1}, \rho_j^k = \rho_i^{k-1}, \varepsilon_j^k = \varepsilon_i^{k-1}, \quad (50)$$

- если

$$p_i^{k-1} < p_{i+1}^{k-1} \text{ и } (x_2 - h/2) \leq x_j \leq (x_2 + h/2),$$

тогда

$$p_j^k = p_{i+1}^{k-1}, u_j^k = u_{i+1}^{k-1}, \rho_j^k = \rho_{i+1}^{k-1}, \varepsilon_j^k = \varepsilon_{i+1}^{k-1}. \quad (51)$$

3) Если

$$(u_{i+1} - u_i) \geq e_1, \quad (52)$$

имеем волну разрежения и решение для $x_1 \leq x_j \leq x_2$ определяется из условия сохранения инвариантов Римана

$$u_j^k = u_i^{k-1} + \frac{u_{i+1}^{k-1} - u_i^{k-1}}{x_2 - x_1} (x_j - x_1), \quad (53)$$

$$\varepsilon_j^k = \left(\sqrt{\varepsilon_i^{k-1}} + \frac{\sqrt{\varepsilon_{i+1}^{k-1}} - \sqrt{\varepsilon_i^{k-1}}}{x_2 - x_1} (x_j - x_1) \right)^2, \quad (54)$$

$$\rho_j^k = \left((\rho_i^{k-1})^{\frac{k-1}{2}} + \frac{(\rho_{i+1}^{k-1})^{\frac{k-1}{2}} - (\rho_i^{k-1})^{\frac{k-1}{2}}}{x_2 - x_1} (x_j - x_1) \right)^{\frac{2}{k-1}}, \quad (55)$$

$$p_j^k = (k-1)\rho_j^k \varepsilon_j^k. \quad (56)$$

При выполнении условий 1)-3), если оказывается, что в ячейку сетки на данном подшаге уже было записано решение, то оно заменяется «новым», когда давление «нового» решения больше давления решения уже имеющегося в ячейке сетки.

4. ТЕСТИРОВАНИЕ МЕТОДА

В этом разделе мы применяем предложенный метод для решения двух задач поглощения более сильной ударной волной более слабой ударной волны с различными начальными условиями (НУ).

Первая тестовая задача имеет следующие НУ:

$$p_j^0 = 10, u_j^0 = 0, \rho_j^k = 10, \text{ если } x_j < 0,$$

$$p_j^0 = 1, u_j^0 = 0, \rho_j^k = 1, \text{ если } 0 \leq x_j < 0.4, \quad (57)$$

$$p_j^0 = 0.1, u_j^0 = 0, \rho_j^0 = 0.125, \text{ если } x_j \geq 0.4.$$

Можно заметить, что это усложненная задача, предложенная Содом [23] (вторая и третья строчки формулы), к которой был добавлен еще

один распад разрыва (с помощью первой строчки формулы (57)).

Область моделирования принималась равной $x \in [-2; 2]$, сетка содержала 400 ячеек, шаг сетки составлял $h = 0.01$. Шаг по времени для процесса «акустики» выбирался согласно критерию Куранта-Фридриха-Леви (15), где $k_c = 2$, т.е. ударная волна на этапе «акустики» перемещалась на 2 ячейки сетки.

Шаг по времени для процесса конвекции выбирался по аналогичному правилу (17), где $k_u = 2$, т.е. ударная волна на этапе конвекции перемещалась на две ячейки сетки ($k_c = k_u = 2$). Маршевый шаг равнялся $\Delta t = 0.021$. Этапы «акустики» и конвекции выполнялись на каждом шаге по времени, т.е. $\Delta t_c = \Delta t_u = \Delta t$.

Результаты расчётов для трёх методов: схемы TVD Хартена [3], метода предыдущей работы автора [20] и предложенного в данной работе, – в момент времени $t = 0.63$ показаны на рисунках 1-6. Предложенная модификация полулагранжевого численного метода позволяет получить более универсальный метод с большей точностью, чем метод [20], с отсутствием пилообразных колебаний (штриховая линия на рис. 1-6) для первой задачи взаимодействия двух одномерных ударных волн (57). В то время, как схема TVD показывает сильную диффузию решения на ударной волне.

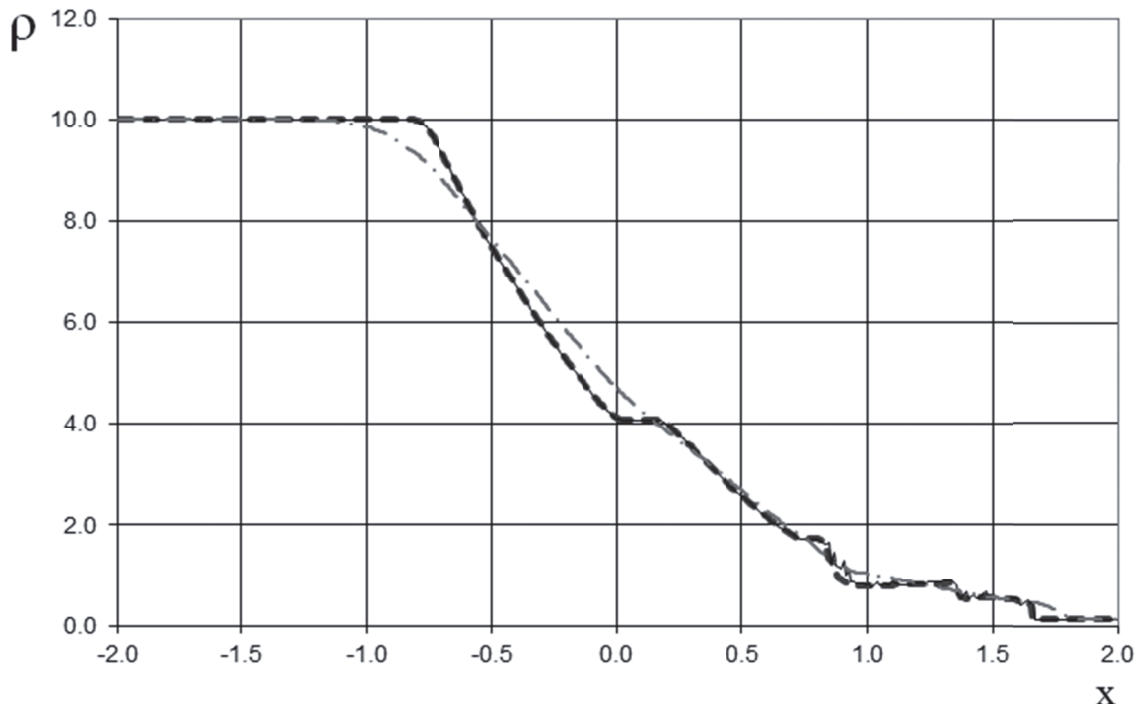


Рис. 1. Распределение плотности в первой задаче о поглощении более сильной ударной волной более слабой ударной волны (57)

— · — · — решение схемы TVD [3], — решение предыдущей работы автора [20], — · — · — предлагаемый метод

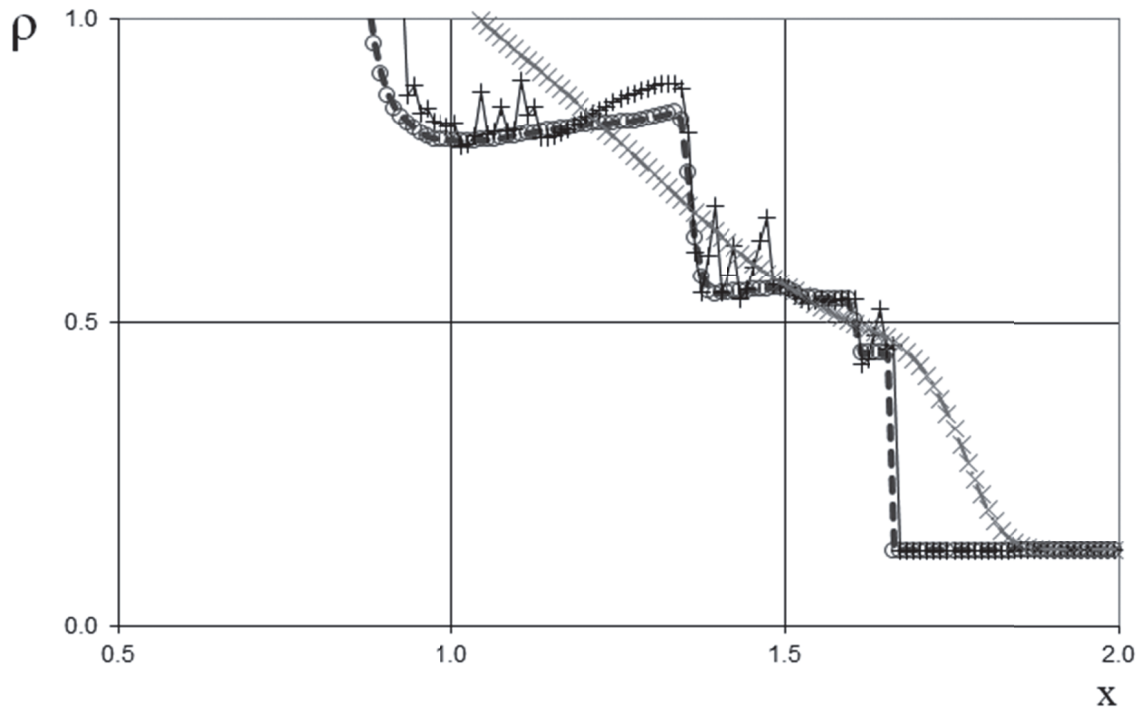


Рис. 2. Распределение плотности (увеличенный масштаб) в первой задаче о поглощении более сильной ударной волной более слабой ударной волны (57):
 —×— - решение схемы TVD [3], —+— - решение предыдущей работы автора [20],
 —●— - предлагаемый метод

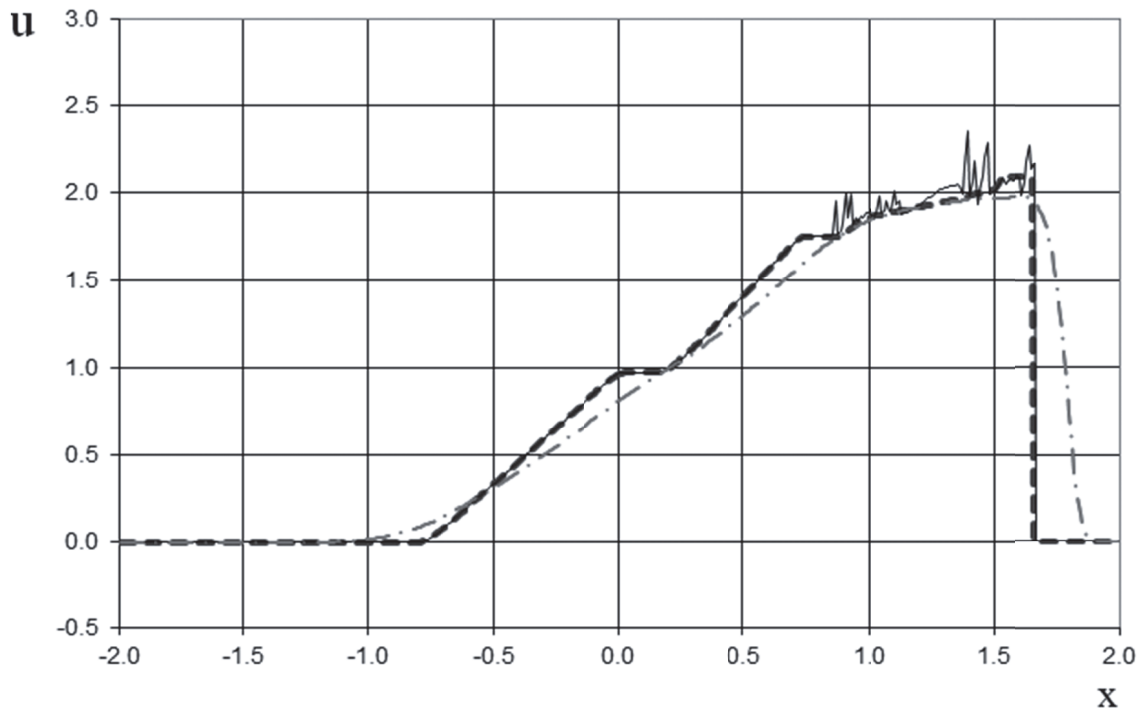


Рис. 3. Распределение скорости в первой задаче о поглощении более сильной ударной волной более слабой ударной волны (57):
 —×— - решение схемы TVD [3], —+— - решение предыдущей работы автора [20],
 —●— - предлагаемый метод

НУ второй тестовой задачи поглощения относительно более сильной ударной волной более слабой ударной волны задавались следующим образом

$$\begin{aligned}
 & p_j^0 = 100, u_j^0 = 0, \rho_j^k = 5, \text{ если } x_j < 0, \\
 & p_j^0 = 1, u_j^0 = 0, \rho_j^k = 1, \text{ если } 0 \leq x_j < 0.4, \quad (58)
 \end{aligned}$$

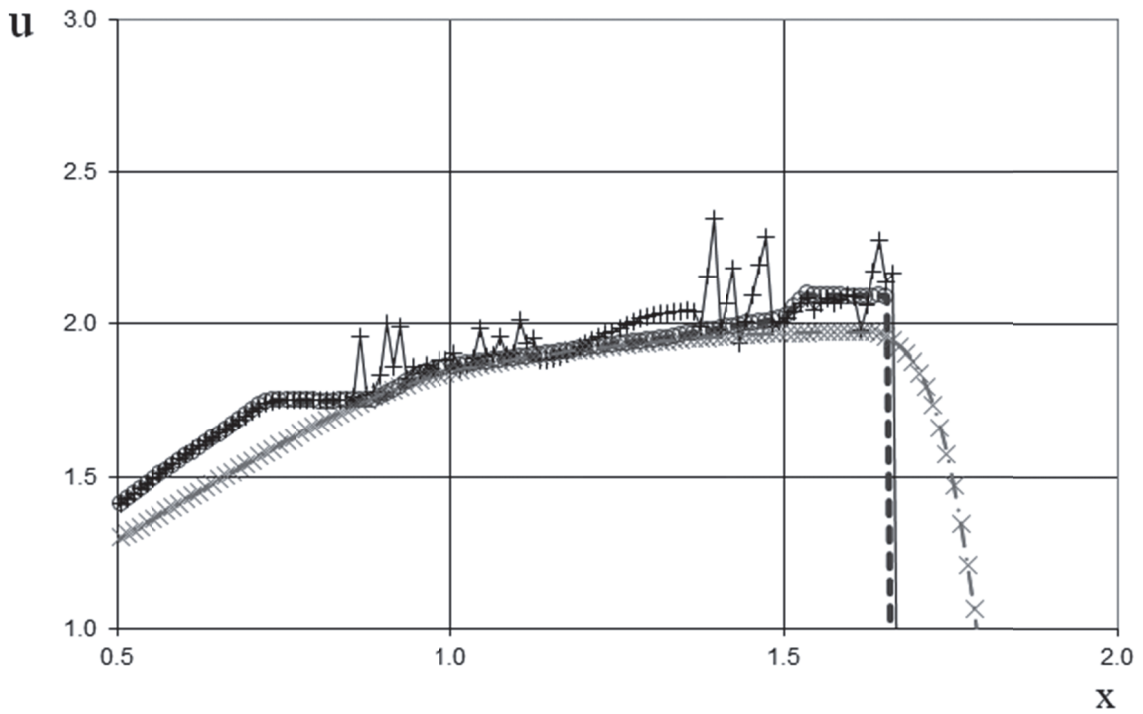


Рис. 4. Распределение скорости (увеличенный масштаб) в первой задаче о поглощении более сильной ударной волной более слабой ударной волны (57):
 —×— - решение схемы TVD [3], —+— - решение предыдущей работы автора [20],
 —●— - предлагаемый метод

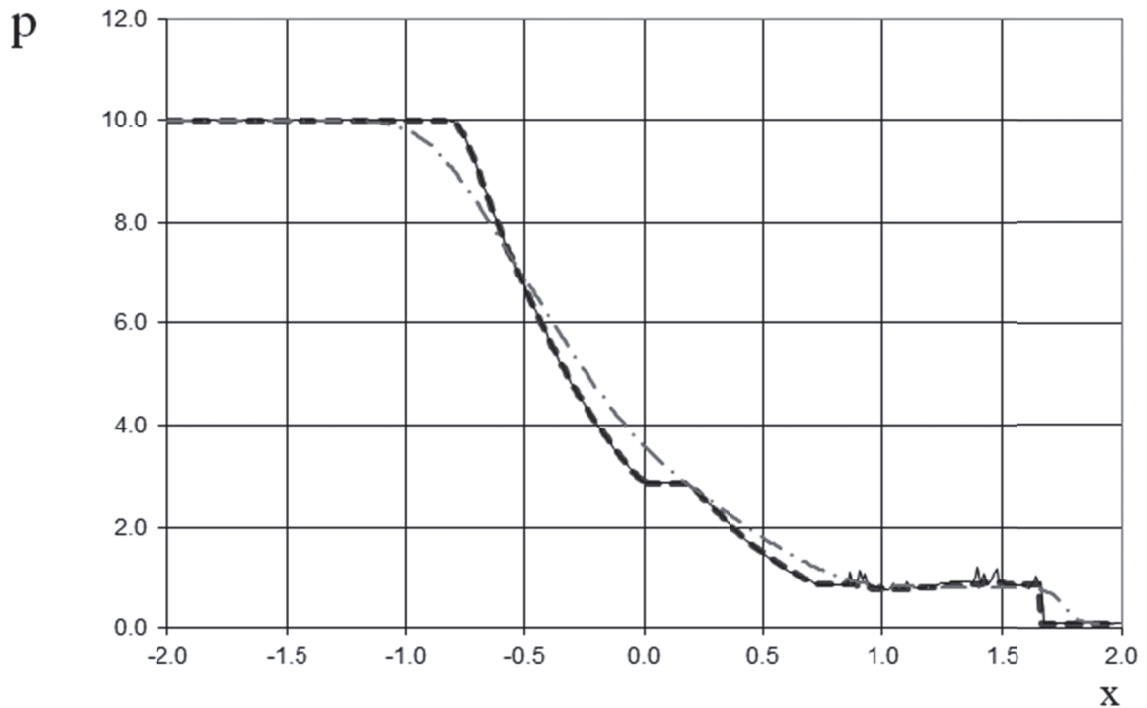


Рис. 5. Распределение давления в первой задаче о поглощении более сильной ударной волной более слабой ударной волны (57):
 — · — - решение схемы TVD [3], — - решение предыдущей работы автора [20],
 — — — - предлагаемый метод

$$p_j^0 = 0.1, u_j^0 = 0, \rho_j^0 = 0.125, \text{ если } x_j \geq 0.4.$$

Также можно отметить, что это усложненная задача, предложенная Содом [23] (втор-

ая и третья строчки формулы), к которой был добавлен еще более сильный, чем в (57), распад разрыва (с помощью первой строчки формулы (58)).

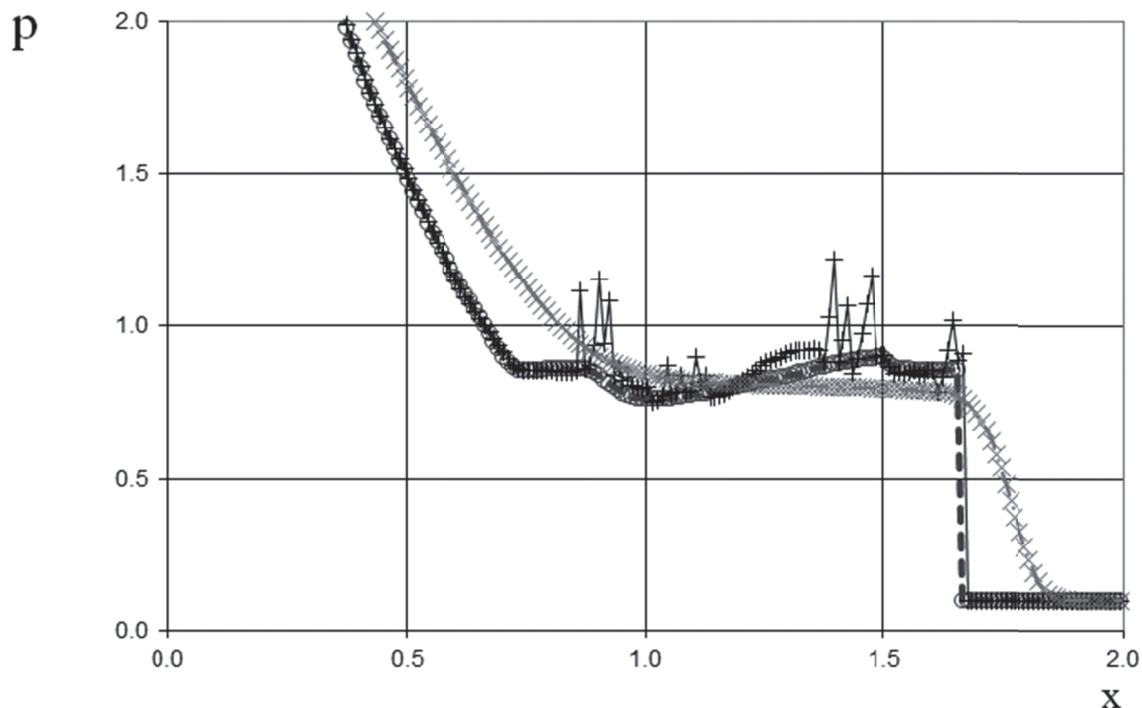


Рис. 6. Распределение давления (увеличенный масштаб) в первой задаче о поглощении более сильной ударной волной более слабой ударной волны (57):
 —×— - решение схемы TVD [3], —+— - решение предыдущей работы автора [20],
 —○— - предлагаемый метод

Область моделирования принималась равной $x \in [-2; 2]$, сетка содержала 400 ячеек, шаг сетки составлял $h = 0.01$. Шаг по времени для процесса «акустики» выбирался согласно критерию Куранта-Фридриха-Леви (15), где $k_c = 3$, т.е. ударная волна на этапе «акустики» перемещалась на 3 ячейки сетки.

Шаг по времени для процесса конвекции выбирался по аналогичному правилу (17), где $k_u = 11$, т.е. ударная волна на этапе конвекции перемещалась на 11 ячеек сетки. Маршевый шаг равнялся $\Delta t = 0.0236$. Этапы «акустики» и конвекции выполнялись на каждом шаге по времени, т.е. $\Delta t_c = \Delta t_u = \Delta t$.

Результаты расчётов для трёх методов: схемы TVD Хартена [3], метода предыдущей работы автора [20] и предложенного в данной работе, – в момент времени $t = 0.2124$ показаны на рисунках 7-12. Предложенная модификация полулагранжевого численного метода позволяет получить более универсальный метод с большей точностью, чем метод [20], с отсутствием пилообразных колебаний (штриховая линия на рис. 7-12) для второй задачи взаимодействия двух одномерных ударных волн (58). В то время, как схема TVD показывает сильную диффузию решения на ударной волне.

5. ВЫВОДЫ

Результаты численного решения для приведённых тестовых случаев сравнивались с решением схемы TVD Хартена [3] и результатами, полученными методом из предыдущей работы автора. На основании полученных результатов можно сделать следующие выводы:

1) Преимуществом предлагаемого метода по сравнению с известными методами TVD, ENO и WENO является отсутствие численной вязкости (диффузии) ударных волн.

2) Со временем ударные волны или волны разрежения могут распространяться несколько медленнее или быстрее, чем в точном решении. Это можно объяснить округлением положения волновых фронтов до точности ячейки сетки за счет использования фиксированной однородной сетки. В рассмотренных задачах точное решение получить затруднительно, поэтому сложно судить о точном положении ударной волны в конечный момент времени.

3) Предложенная модификация полулагранжевого численного метода позволяет получить распределения характеристик течения с отсутствием «пилообразных» колебаний для рассмотренного класса задач.

Точность предлагаемого метода определяется итерационным точным решателем Годунова для разрывов потока. Итерации заканчиваются при достижении разницы давлений между текущей и предыдущей итерациями меньше 10^{-5} .

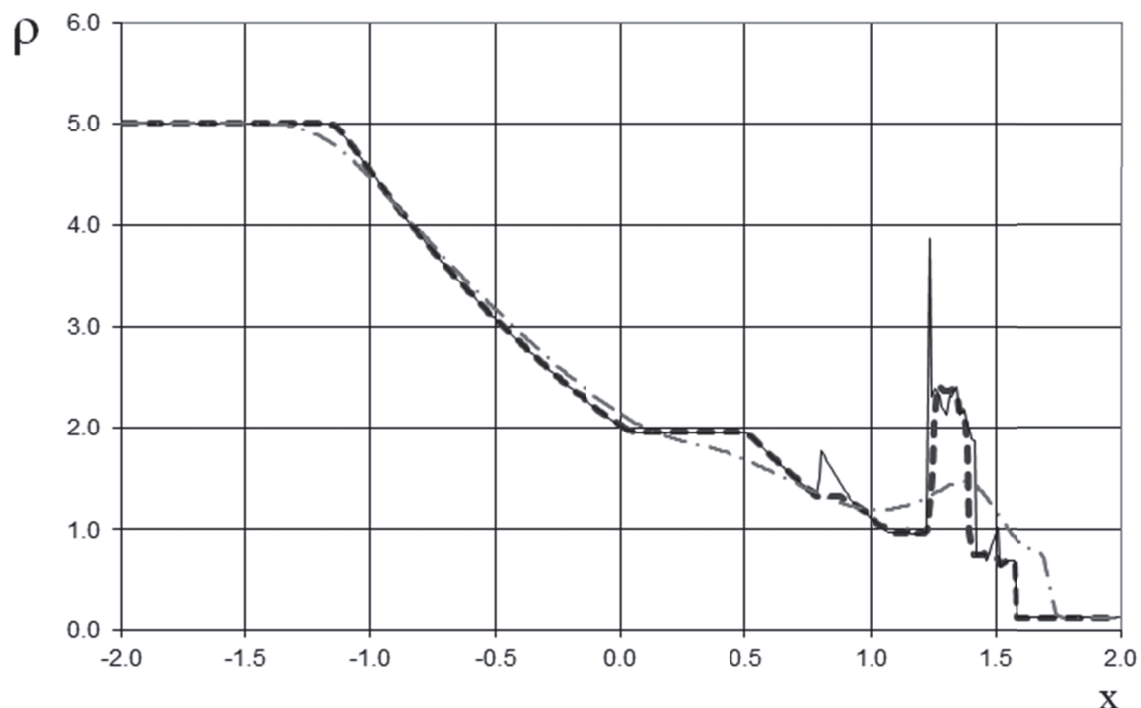


Рис. 7. Распределение плотности во второй задаче о поглощении более сильной ударной волной более слабой ударной волны (58):

— · — - решение схемы TVD [3], — - решение предыдущей работы автора [20],
 — · — · - предлагаемый метод

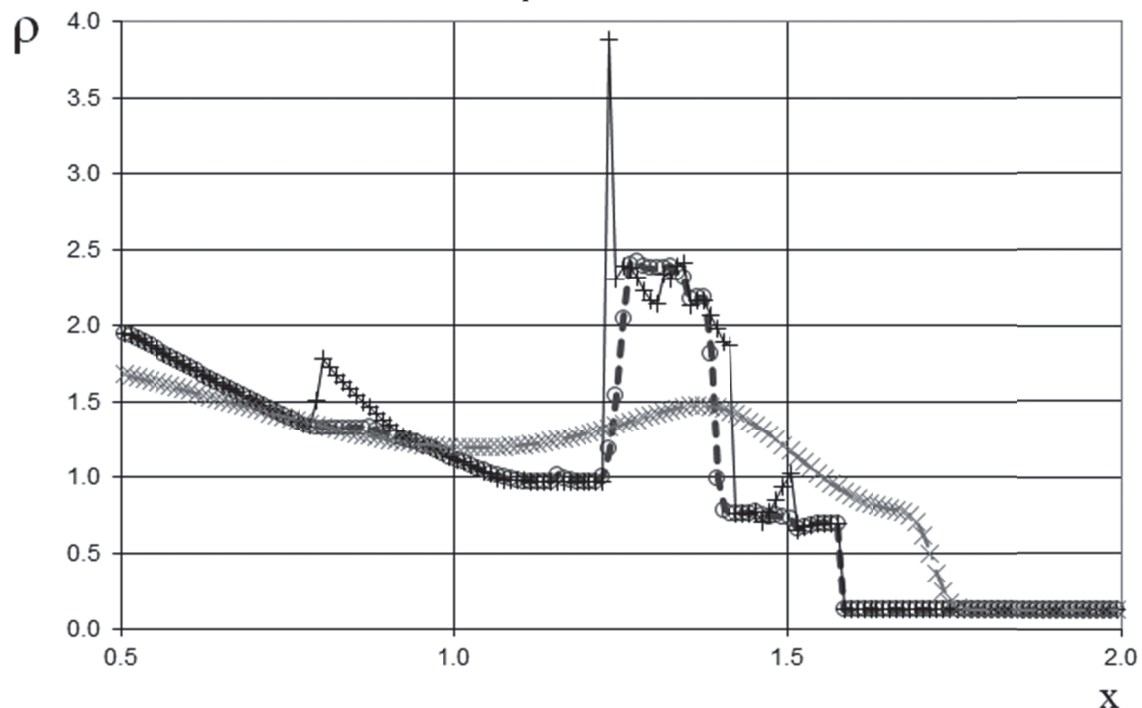


Рис. 8. Распределение плотности (увеличенный масштаб) во второй задаче о поглощении более сильной ударной волной более слабой ударной волны (58):

— × — - решение схемы TVD [3], — + — - решение предыдущей работы автора [20],
 — · — · - предлагаемый метод

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. von Neumann, J.; Richtmyer, R.D. A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks // J. Appl. Phys. v. 21. 1950. P. 232.
2. Jameson, A. Analysis and design of numerical schemes for gas dynamics, 1: Artificial diffusion, upwind biasing, limiters and their effect on accuracy

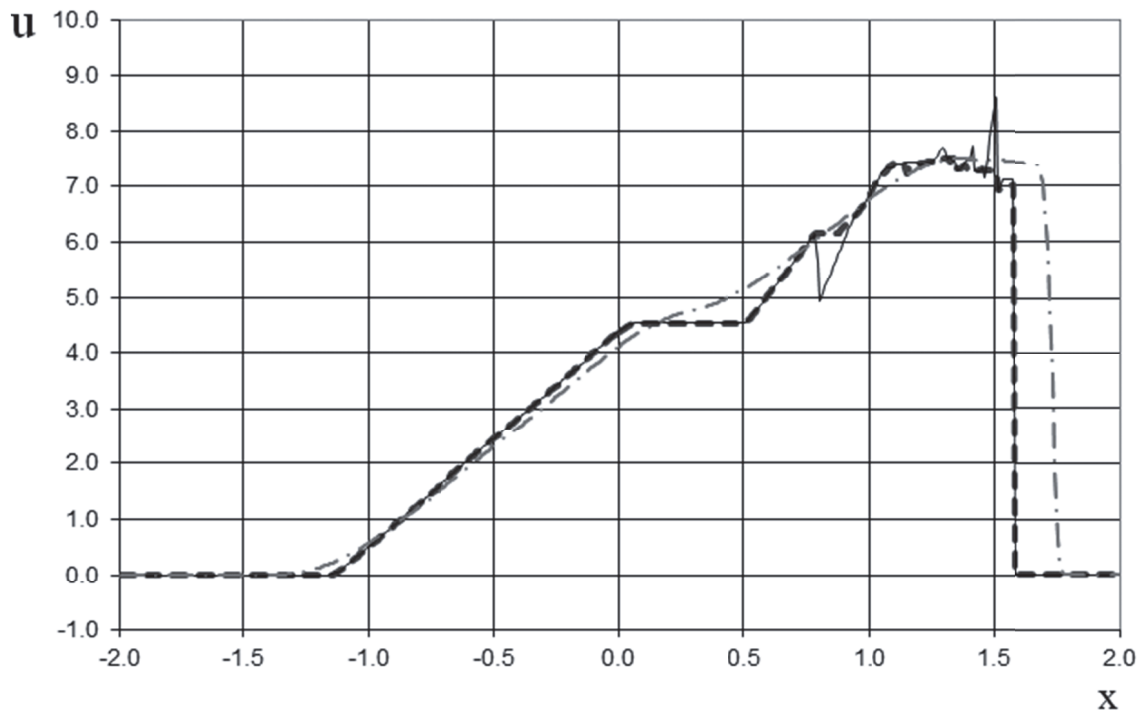


Рис. 9. Распределение скорости во второй задаче о поглощении более сильной ударной волной более слабой ударной волны (58):

— · — - решение схемы TVD [3], — - решение предыдущей работы автора [20],
 — · — · - предлагаемый метод

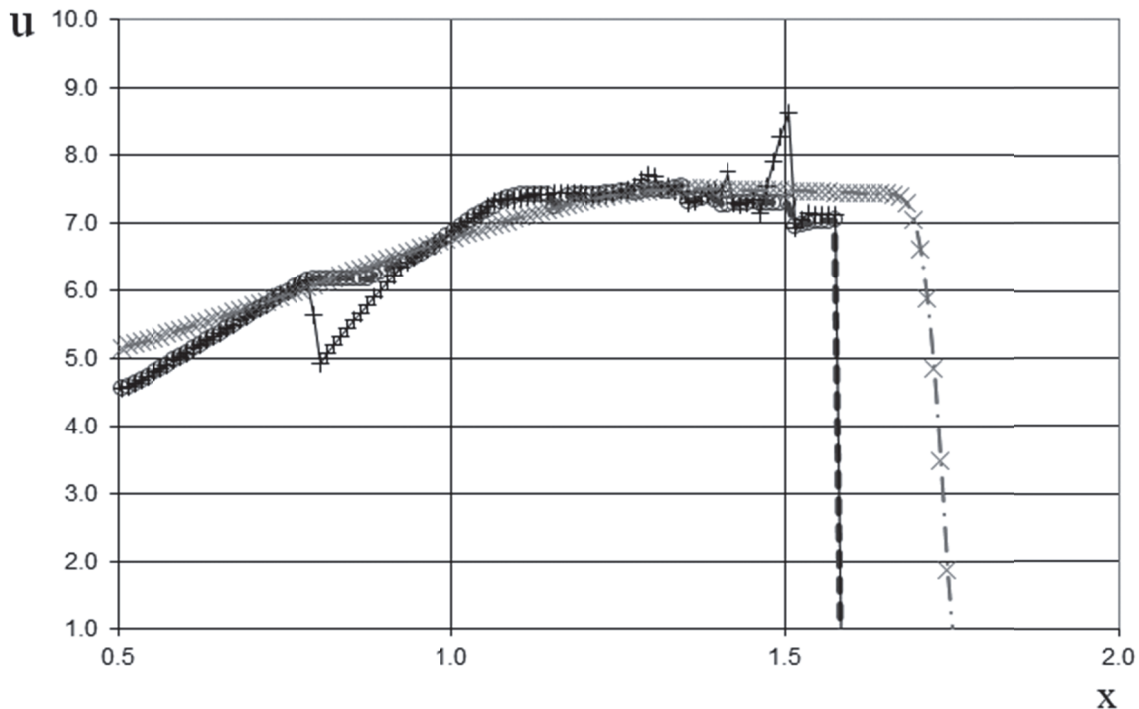


Рис. 10. Распределение скорости (увеличенный масштаб) во второй задаче

о поглощении более сильной ударной волной более слабой ударной волны (58):

— × — - решение схемы TVD [3], — + — - решение предыдущей работы автора [20],
 — · — · - предлагаемый метод

- and multigrid convergence. // Int. J. Comput. Fluid Dyn. v. 4. 1994. P. 171–218.
3. Harten, A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. of Comp. Phys. v. 49. 1983. P. 357–393.
 4. Harten, A., Engquist, B., Osher, S., Chakravarthy, S.R. Uniform high order accurate essentially non-oscillatory schemes, III. // J. Comput. Phys. v. 71. 1987. P. 231–303.

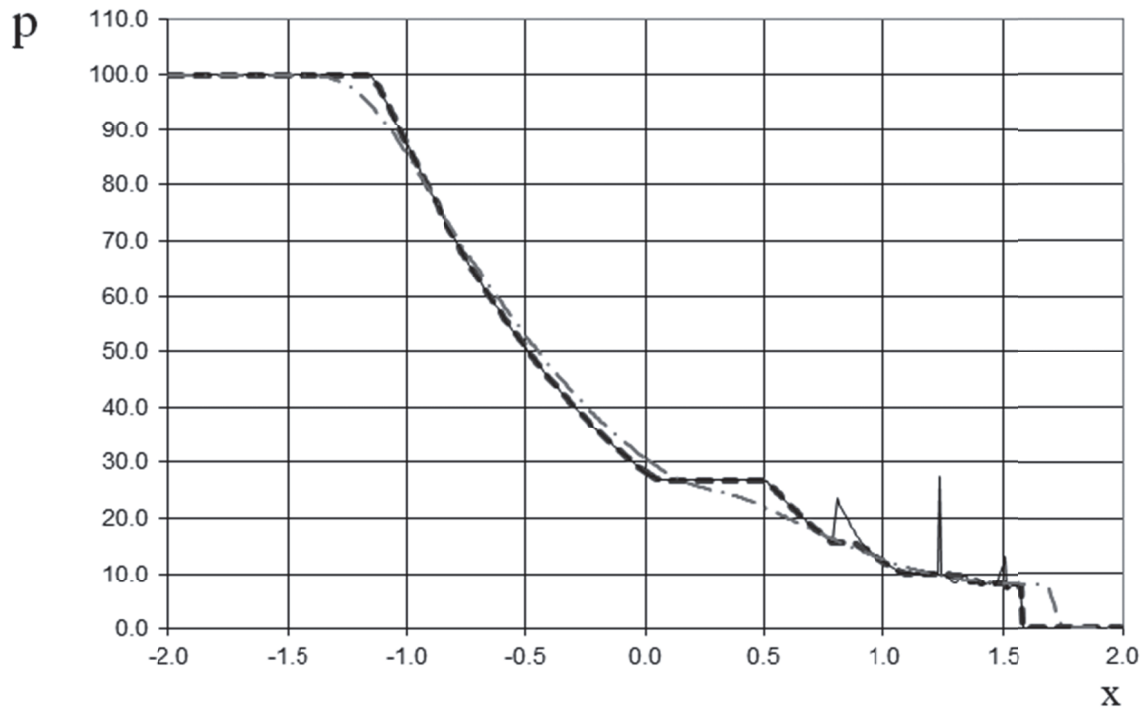


Рис. 11. Распределение давления во второй задаче о поглощении более сильной ударной волной более слабой ударной волны (58):

— · — - решение схемы TVD [3], — - решение предыдущей работы автора [20],
 — — — - предлагаемый метод

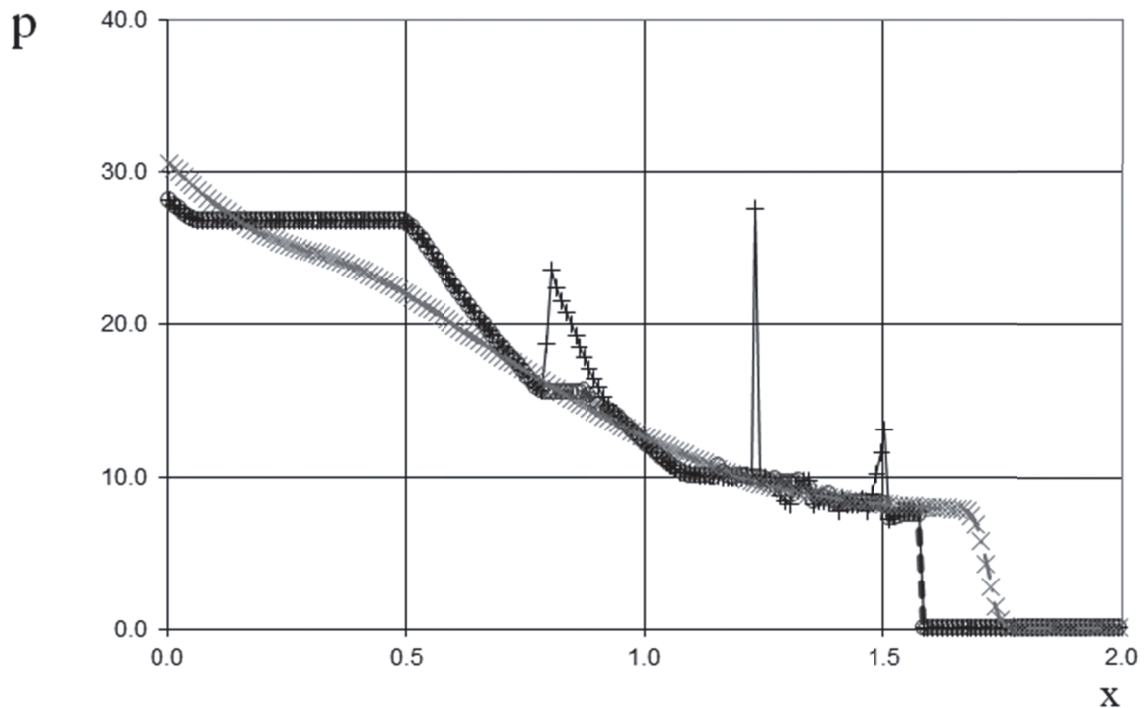


Рис. 12. Распределение давления (увеличенный масштаб) во второй задаче о поглощении более сильной ударной волной более слабой ударной волны (58)

— × — - решение схемы TVD [3], — + — - решение предыдущей работы автора [20],
 — o — - предлагаемый метод

5. Liu, X.D., Osher, S., Chan, T. Weighted essentially non-oscillatory schemes. // J. Comput. Phys. v. 115. 1994. P. 200–212.
6. Harten, A. ENO schemes with subcell resolution // J. Comput. Phys. v. 83. 1987, P. 148–184.
7. Harten, A., Osher, S. Uniformly high order essentially non-oscillatory schemes I // SIAM J. Numer. Anal. v. 24. 1987 P. 279–309.
8. Harten, A., Osher, S., Engquist, B., Chakravarthy, S. Some results on uniformly high order accurate

- essentially non-oscillatory schemes // Appl. Numer. Math. v. 2. 1986. P. 347–377.
9. *Shu, C.-W., Osher, S.* Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes // J. Comput. Phys. v. 77. 1988. P. 439–471.
 10. *Shu, C.-W., Osher, S.* Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes II // J. Comput. Phys. v. 83. 1989. P. 32–78.
 11. *Jiang, G.-S., Shu, C.-W.* Efficient implementation of Weighted ENO schemes // J. Comput. Phys. v. 126. 1996. P. 202–228.
 12. *Pawar, S., San, O.* CFD Julia: A Learning Module Structuring an Introductory Course on Computational Fluid Dynamics // Fluids. v. 4. 2019. P. 159. <https://doi.org/10.3390/fluids4030159>.
 13. *Roe, P.L.* Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes // J. of Comp. Phys. v. 135. 1997. P. 250–258.
 14. *Годунов, С.К.* Численное решение многомерных задач газовой динамики / С.К. Годунов, А.В. Забродин, М.Я. Иванов, А.Н. Крайко, Г.П. Прокопов. М.: Наука, 1976. 400 с.
 15. *LeVeque, R.J.* Balancing source terms and flux gradients on high-resolution Godunov methods: The quasi-steady wave-propagation algorithm // J. Comput. Phys. v. 146. 1998. P. 346–365.
 16. *Einfeldt, B.* On Godunov-type methods for gas dynamics // SIAM J. Numer. Anal. v. 25. 1988. P. 294–318.
 17. *Wu, Y.Y., Cheung, K.F.* Explicit solution to the exact Riemann problem and application in nonlinear shallow-water equations // Int. J. Numer. Meth. Fluids. v. 57. 2008. P. 1649–1668. doi:10.1002/fld.1696.
 18. *Saba Basiri, Seyyed Mohammad Ghoreishi, Jaber Safdari, Sadegh Yousefi-Nasab,* Three-dimensional simulation of gas flow for predicting the pressure and velocity profiles inside a gas centrifuge machine using the DSMC method // Vacuum. v. 219. Part A. 2024. P. 112664, ISSN 0042-207X, <https://doi.org/10.1016/j.vacuum.2023.112664>.
 19. *Никонов, В.В.* Применение подхода Лагранжа к решению одномерной задачи распространения ударных волн в газе / В.В. Никонов, В.Г. Шахов // Известия Самарского научного центра РАН. 2011. Т. 13. № 6. С. 136–141.
 20. *Nikonov, V.A* Semi-Lagrangian Godunov-Type Method without Numerical Viscosity for Shocks // Fluids. v. 7. 2022. P. 16. <https://doi.org/10.3390/fluids7010016>
 21. *Никонов, В.В.* Математическое моделирование сжимаемых одномерных течений с помощью полулагранжевого численного метода Годунова без вычислительной вязкости для ударных волн / В.В. Никонов // Известия Самарского научного центра РАН. 2024. Т. 26. № 3. С. 147–163.
 22. *Taylor, E.M., Wu, M., Martin, M.P.* Optimization of Nonlinear Error for Weighted Essentially Non-Oscillatory Methods in Direct Numerical Simulations of Compressible Turbulence. // J. Comput. Phys. v. 223. 2007. P. 384–397.
 23. *Sod, G.A.* A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. v. 107. 1978. P. 1–31.

MATHEMATICAL MODELING OF THE ABSORPTION OF WEAKER SHOCK WAVE BY RELATIVELY STRONGER ONE USING THE SEMI-LAGRANGIAN GODUNOV-TYPE METHOD WITHOUT NUMERICAL VISCOSITY FOR SHOCKS

© 2024 V.V. Nikonov

Samara National Research University named after Academician S.P. Korolyov, Samara, Russia

This paper describes a modification of the semi-Lagrangian Godunov-type method without numerical viscosity for shocks, which was proposed by the author in a previously published paper, and its application to the problems of absorption of a weaker shock wave by stronger one. Numerous high-resolution Euler-type methods have been proposed to resolve smooth flow scales accurately and to capture the discontinuities simultaneously. One of the disadvantages of these methods is the numerical viscosity for shocks. In the shock, the flow parameters change abruptly at a distance equal to the mean free path of a gas molecule, which is much smaller than the cell size of the computational mesh. Due to the numerical viscosity, Euler-type methods stretch the parameter change in the shock over few mesh cells. In previous works, the author proposed a semi-Lagrangian Godunov-type method without numerical viscosity for shocks. In this method, the one-dimensional Euler equations are solved, but the equations are divided into two parts that describe the convection and acoustic processes separately, with corresponding different time steps. The iterative Godunov exact solver is additionally used because the Riemann invariants are non-conserved for moderate and strong shocks in an ideal gas. The iterative Godunov exact solver determines the accuracy of the proposed method for flow discontinuities. The calculations used the condition of iteration termination when the pressure difference between the current and previous iterations was less than 10^{-5} . The proposed method is a particle-in-cell (PIC) method. To the best of the author's knowledge, no similar PIC numerical schemes using the Riemann invariants or an iterative Godunov exact solver existed at the time of his first paper on this method in 2011. In shock waves for the proposed method, the flow properties change instantaneously (with accuracy depending on the mesh cell size). In a previous paper published in 2024, a unified formula for the density distribution of rarefaction waves was proposed. In the 2022 article, a linear law for the distribution of flow parameters was employed for a rarefaction wave when modeling the Shu-Osher problem with the aim of reducing parasitic oscillations. Additionally, the old nonlinear law derived from the Riemann invariants was used for the remaining test problems. This article proposes a further advancement of the numerical scheme of the proposed method described in the author's previous article of 2024, namely, another modification of the method for modeling strong shock waves and its application to the problem of the absorption of weaker shock wave by stronger one. The obtained numerical analysis results for the two test cases were compared with both the results of the method presented in the 2022 paper and data of the Total Variation Diminishing (TVD) scheme proposed by Harten. Unfortunately, it is difficult to obtain exact solutions to the considered problems.

Keywords: gas, shock wave, Riemann problem, Godunov method, Lagrange approach, numerical viscosity.

DOI: 10.37313/1990-5378-2024-26-6-185-199

EDN: MCFUNM

REFERENCES

1. von Neumann, J., Richtmyer, R.D. A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks // J. Appl. Phys. v. 21. 1950. P. 232.
2. Jameson, A. Analysis and design of numerical schemes for gas dynamics, 1: Artificial diffusion, upwind biasing, limiters and their effect on accuracy and multigrid convergence. // Int. J. Comput. Fluid Dyn. v. 4. 1994. P. 171–218.
3. Harten, A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. of Comp. Phys. v. 49. 1983. P. 357–393.
4. Harten, A., Engquist, B., Osher, S., Chakravarthy, S.R. Uniform high order accurate essentially non-oscillatory schemes, III. // J. Comput. Phys. v. 71. 1987. P. 231–303.
5. Liu, X.D., Osher, S., Chan, T. Weighted essentially non-oscillatory schemes. // J. Comput. Phys. v. 115. 1994. P. 200–212.
6. Harten, A. ENO schemes with subcell resolution // J. Comput. Phys. v. 83. 1987, P. 148–184.
7. Harten, A., Osher, S. Uniformly high order essentially non-oscillatory schemes I // SIAM J. Numer. Anal. v. 24. 1987 P. 279–309.
8. Harten, A., Osher, S., Engquist, B., Chakravarthy, S. Some results on uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes // Appl. Numer. Math. v. 2. 1986. P. 347–377.
9. Shu, C.-W., Osher, S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes // J. Comput. Phys. v. 77. 1988. P. 439–471.
10. Shu, C.-W., Osher, S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes II // J. Comput. Phys. v. 83. 1989. P. 32–78.
11. Jiang, G.-S., Shu, C.-W. Efficient implementation of Weighted ENO schemes // J. Comput. Phys. v. 126. 1996. P. 202–228.
12. Pawar, S., San, O. CFD Julia: A Learning Module Structuring an Introductory Course on Computational Fluid Dynamics // Fluids. v. 4. 2019. P. 159. <https://doi.org/10.3390/fluids4030159>.
13. Roe, P.L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes // J. of Comp. Phys. v. 135. 1997. P. 250–258.
14. Godunov, S.K. Chislennoe reshenie mnogomernyh zadach gazovoj dinamiki / S.K. Godunov, A.V. Zabrodin, M.Ya. Ivanov, A.N. Krajko, G.P. Prokopov. M.: Nauka, 1976. 400 s.
15. LeVeque, R.J. Balancing source terms and flux gradients on high-resolution Godunov methods: The quasi-steady wave-propagation algorithm // J. Comput. Phys. v. 146. 1998. P. 346–365.
16. Einfeldt, B. On Godunov-type methods for gas dynamics // SIAM J. Numer. Anal. v. 25. 1988. P. 294–318.
17. Wu, Y.Y.; Cheung, K.F. Explicit solution to the exact Riemann problem and application in nonlinear shallow-water equations // Int. J. Numer. Meth. Fluids. v. 57. 2008. P. 1649–1668. doi:10.1002/flid.1696.
18. Saba Basiri, Seyyed Mohammad Ghoreishi, Jaber Safdari, Sadegh Yousefi-Nasab, Three-dimensional simulation of gas flow for predicting the pressure and velocity profiles inside a gas centrifuge machine using the DSMC method // Vacuum. v. 219. Part A. 2024. P. 112664, ISSN 0042-207X, <https://doi.org/10.1016/j.vacuum.2023.112664>.
19. Nikonov, V.V. Primenenie podhoda Lagranzha k resheniyu odnomernej zadachi rasprostraneniya udarnyh voln v gaze / V.V. Nikonov, V.G. Shahov // Izvestiya Samarskogo nauchnogo centra RAN. 2011. T. 13. № 6. S. 136–141.
20. Nikonov, V.A. Semi-Lagrangian Godunov-Type Method without Numerical Viscosity for Shocks // Fluids. v. 7. 2022. P. 16. <https://doi.org/10.3390/fluids7010016>
21. Nikonov, V.V. Matematicheskoe modelirovanie szhimaemyh odnomernyh techenij s pomoshch'yu polulagranzhevogo chislennogo metoda Godunova bez vychislitel'noj vyazkosti dlya udarnyh voln / V.V. Nikonov // Izvestiya Samarskogo nauchnogo centra RAN. 2024. T. 26. № 3. S. 147–163.
22. Taylor, E.M., Wu, M., Martin, M.P. Optimization of Nonlinear Error for Weighted Essentially Non-Oscillatory Methods in Direct Numerical Simulations of Compressible Turbulence. // J. Comput. Phys. v. 223. 2007. P. 384–397.
23. Sod, G.A. A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. v. 107. 1978. P. 1–31.