

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФРАКТАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ, ПОСТРОЕННЫХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ИЗНОСА

© 2024 Е. Н. Сосенушкин, Е. А. Яновская, А. С. Желнов

Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», г. Москва, Россия

Статья поступила в редакцию 02.08.2024

Износ поверхности – это процесс разрушения поверхности из-за воздействия напряжений при контакте. В качестве меры повреждения или удаления материала с твердой поверхности износ можно рассматривать, как результат механического, термического и химического воздействия на поверхность. Когда две шероховатые, номинально плоские поверхности сближаются, шероховатость поверхности приводит к возникновению контакта в отдельных пятнах контакта. Истинная площадь контакта – это совокупность площадей отдельных пятен контакта. Для большинства металлов при нормальных нагрузках она составляет лишь несколько процентов от видимой площади контакта. Типичные модели деформации поверхности являются либо упругими, либо пластическими, либо упругопластическими и могут быть представлены в виде функций поверхности и констант материала. В предложенной работе рассматривается применение фрактальных моделей, полученных с использованием методов искусственного интеллекта, для прогнозирования износа с целью изучения влияния параметров фрактальной поверхности на скорость изнашивания.

Ключевые слова: фрактальные поверхности; искусственный интеллект; износ; компьютерное моделирование; машинное обучение.

DOI: 10.37313/1990-5378-2024-26-4-143-149

EDN: DXHZSQ

*Работа поддержана Минобрнауки РФ
(госзадание, проект №а FSFS- 20240007).*

МЕТОДЫ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ФРАКТАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В работе [1] ранее была рассмотрена возможность применения методов искусственного интеллекта для компьютерного моделирования фрактальных поверхностей. Моделирование фрактальных поверхностей с применением машинного обучения проводилось с использованием языка программирования Python. В качестве обучающего алгоритма использовалась генеративная модель обучения [2-3].

В исследованиях [4, 5] уже проводилось построение поверхностей в общем случае, сведенное к функции Вейерштрасса:

$$Z(x, y) = A \sum_{n=1}^{\max(n, m)} \sum_{m=1}^{\max(n, m)} \frac{\cos\{2\pi k^n x + \varphi_n\}}{k^{n(2-D)}} \frac{\cos\{2\pi k^m y + \psi_m\}}{k^{m(2-D)}}, \quad (1)$$

Сосенушкин Евгений Николаевич, доктор технических наук, профессор кафедры систем пластического деформирования. E-mail: sen@stankin.ru

Яновская Елена Александровна, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики. E-mail: elena_yanovskaya@bk.ru

Желнов Андрей Сергеевич, преподаватель кафедры прикладной математики. E-mail: a.zhelnov@stankin.ru

где A – масштабируемая константа, D – фрактальная размерность поверхности, k^n и k^m – коэффициенты частоты, n, m – целые числа, определяемые длиной измерения (минимально ограниченные 1).

Отмечалось, что сами модели поверхностей, построенные с помощью функции Вейерштрасса [6], не являются фрактальными ввиду того, что отсутствует однородность результата. Этот факт обуславливал использование машинного обучения, как возможную замену для построения поверхностей. Использование предложенного метода моделирования для создания шероховатых поверхностей с фрактальной размерностью, приводит к получению контура с желаемым уровнем шероховатости поверхности.

Оценка точности построения происходила с помощью среднеквадратичного отклонения. Также была получена оценка реалистичности построенных моделей фрактальных поверхностей, с применением метода Монте-Карло [7-8], где в качестве проверяющего фактора была использована мера отклонения точек максимума построенной с помощью обучения поверхности от точек максимума сгенерированной заранее фрактальной поверхности. Полученные результаты [1] показали, что фрактальная модель реалистична, а фрактальная размерность может

быть использована в качестве значений различных масштабно-зависимых параметров, таких как длина поверхности и объем шероховатости.

В предложенной работе рассматривается прогнозирование износа поверхностей и влияние параметров фрактальных поверхностей, полученных с использованием методов искусственного интеллекта, на скорость изнашивания.

Модель для прогнозирования и анализа износа

Существуют различные виды изнашивания: адгезионное [9], абразивное [10], усталостное [11-12], окислительное [13], смятие [14]. В работе рассматривается процесс адгезионного изнашивания, потому что полученная зависимость между объемом износа, расстоянием скольжения и площадью контакта хорошо согласуется с экспериментальными результатами. В дальнейшем это позволит проводить натурные эксперименты с оценками, близкими к реальным. По большому счету адгезионный износ представляет собой соединение трущихся поверхностей в местах контакта тел и в конечном итоге удаление продуктов износа в результате разрушения, усталости или коррозии.

Для адгезионного изнашивания оценка объема изношенного материала производится на основе закона Арчарда [15]:

$$Q = \frac{k_Q W L}{H}, \quad (2)$$

где Q – безразмерный коэффициент износа, W – общая нормальная нагрузка, L – расстояние трения, H – твердость изнашиваемого тела (самой мягкой части поверхности).

Оценка объема изношенного материала Q требует знания коэффициента износа, который определяется с помощью соответствующего эксперимента. При этом процессы трения и изнашивания при модельном испытании должны быть идентичны работе натурального узла трения, т. е. критерии подобия должны быть одними же теми же [16].

Уравнение (2) можно преобразовать, перейдя к рассмотрению упругопластического контакта, тогда объем изношенного материала будет оцениваться по формуле:

$$Q = (k_e A_{re} + k_p A_{rp}) L \sqrt{1 + 3\mu^2}, \quad (3)$$

где k_e и k_p – коэффициенты упругого и пластического износа, соответственно, μ – коэффициент трения, A_{re} – площадь упругого контакта, A_{rp} – площадь пластического контакта и $A_{re} + A_{rp} = A_r$.

Следует отметить, что в уравнении (3) коэффициент износа k_Q разложен на упругую и пластическую составляющие. Если деформации рассматриваются за пределом текучести,

то k_Q – это коэффициент, который представляет собой совокупное влияние смазки, скорости скольжения, температуры, химических реакций, свойств материала и др. Реальный процесс изнашивания, также включает упругие деформации.

Это вносит для коэффициента k_Q зависимость от рельефа поверхности. Т. е. k_Q становится коэффициентом, зависящим от площади контакта A_r . Разложением k_Q на упругую и пластическую части, коэффициент k_Q заменяется коэффициентами k_e и k_p , оба из которых не зависят от геометрических особенностей контактирующих поверхностей. Таким образом, k_e и k_p можно рассматривать, как вероятностные константы [17].

При разложении площади упругого и пластического контакта через соответствующие уравнения можно связать износ с фрактальными параметрами поверхности [4]:

$$Q = \left\{ k_e \frac{D}{2-D} \left(S_L - S_L^{\frac{D}{2}} S_C^{\frac{2-D}{2}} \right) + k_p \frac{D}{2-D} S_L^{\frac{D}{2}} S_C^{\frac{2-D}{2}} \right\} L \sqrt{1 + 3\mu^2}, \quad (4)$$

где S_L – реальная площадь самого большого пятна контакта, S_C – реальная площадь пятна в критической области, $A_{re} = \frac{D}{2-D} \left(S_L - S_L^{\frac{D}{2}} S_C^{\frac{2-D}{2}} \right)$, $A_{rp} = \frac{D}{2-D} S_L^{\frac{D}{2}} S_C^{\frac{2-D}{2}}$.

Следует отметить, что общую площадь контакта во фрактальной размерности можно вычислить следующим образом:

$$A_r = \frac{D}{2-D} S_L. \quad (5)$$

Кроме того, реальная площадь пятна контакта в критической области вычисляется:

$$S_C = \frac{G^2}{\left(N \frac{\sigma_y}{2E} \right)^{\frac{2}{D-1}}}, \quad (6)$$

где σ_y – предел упругости, E – модуль упругости, N – коэффициент, связывающий твердость с пределом упругости.

Следовательно, уравнение (4), совместно с уравнениями (5) и (6) может быть переписано в виде:

$$Q = \left\{ k_e - (k_e - k_p) \frac{D G^2}{A_r (2-D) \left(N \frac{\sigma_y}{2E} \right)^{\frac{2}{D-1}}} \right\}^{\frac{2-D}{2}} A_r L \sqrt{1 + 3\mu^2} \quad (7)$$

Для удобства в уравнении (7) можно нормировать следующие параметры:

$$Q^* = \frac{Q}{dA_r}, A_r^* = \frac{A_r}{A_n}, G^* = \frac{G}{\sqrt{A_n}}, \varphi = N \frac{\sigma_y}{2E}, \quad (8)$$

где A_n – n -я площадь контакта, Q^* – нормированная скорость изнашивания, A_r^* – нормированная реальная площадь контакта, G^* – нормированная амплитуда размаха, φ – константа свойств материала.

С нормированными переменными уравнение принимает вид:

$$Q^* = \left\{ k_e - (k_e - k_p) \frac{D G^{*2}}{A_r^* (2-D) \varphi^{\frac{2}{D-1}}} \right\}^{\frac{2-D}{2}} A_r^* \sqrt{1 + 3\mu^2} \quad (9)$$

Фактически уравнение (9) является моделью прогнозирования износа и оценки скорости износа фрактальной поверхности.

Компьютерное моделирование износа поверхности

Для моделирования фрактальных поверхностей с применением машинного обучения было принято решение использовать язык программирования Python. Кроме того, были задействованы следующие библиотеки:

- NumPy;
- Matplotlib;
- Keras.

Такой выбор обосновывается тем, что NumPy поддерживает многомерные массивы и высокоуровневые математические функции для работы с этими массивами. Matplotlib позволяет строить точную визуализацию построенных моделей, а библиотека Keras была задействована

на для машинного обучения. В качестве обучающего алгоритма использовалась генеративная модель обучения [9-10], чтобы генерировать новые фрактальные поверхности. Вместо простого создания фрактальной поверхности с использованием случайных точек, генератор создает фрактальные поверхности на основе распределения, изученного в процессе обучения.

Генеративные модели считаются достаточно новым и перспективным подходом к глубокому машинному обучению. Модель используется для генерации новых данных, с точки зрения вероятностных моделей. В основе моделирования лежит подбор новых данных по основному признаку или ряду признаков.

Модель уже на этапе построения показала свою эффективность, в сравнении с методом случайных смещений ввиду того, что при построении поверхности с помощью генеративного метода, модель не требует дополнительной проверки на самоподобие. Генерация происходит на основе тех признаков, которые задаются изначально, что в разы увеличивает скорость построения, уменьшает ресурсоемкость программы и облегчает пользователю само построение фрактальной поверхности [1].

ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ ФРАКТАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ НА СКОРОСТЬ ИЗНАШИВАНИЯ

Влияние фрактальной размерности на интенсивность износа является одной из главных проблем. Чтобы численно исследовать влияние D на Q^* с помощью уравнения (9), необходимо подобрать значения других параметров, осно-

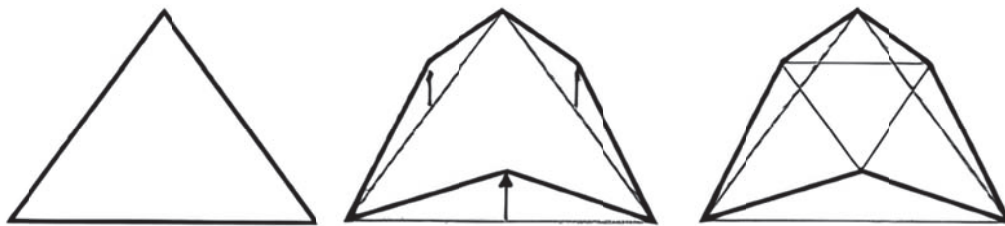


Рис. 1. Этапы построения фрактальной поверхности

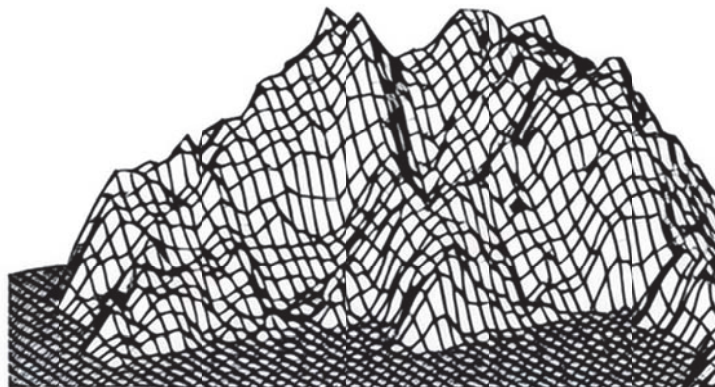


Рис. 2. Результаты полного построения поверхности [4]

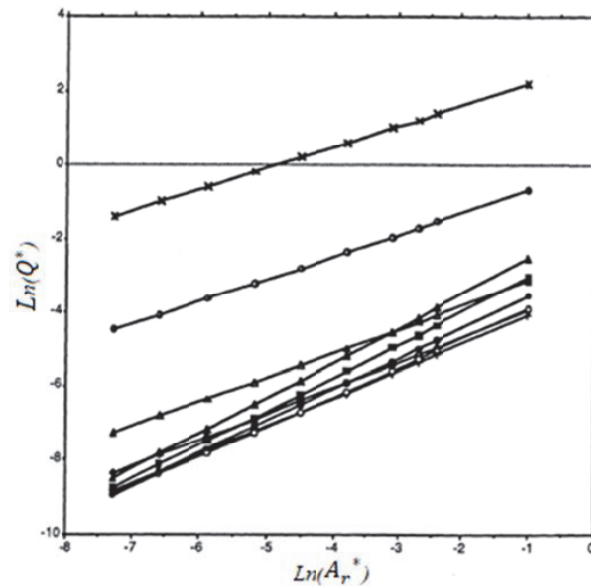


Рис. 3. Влияние фрактальной размерности и нормированной площади контакта на нормированную скорость изнашивания

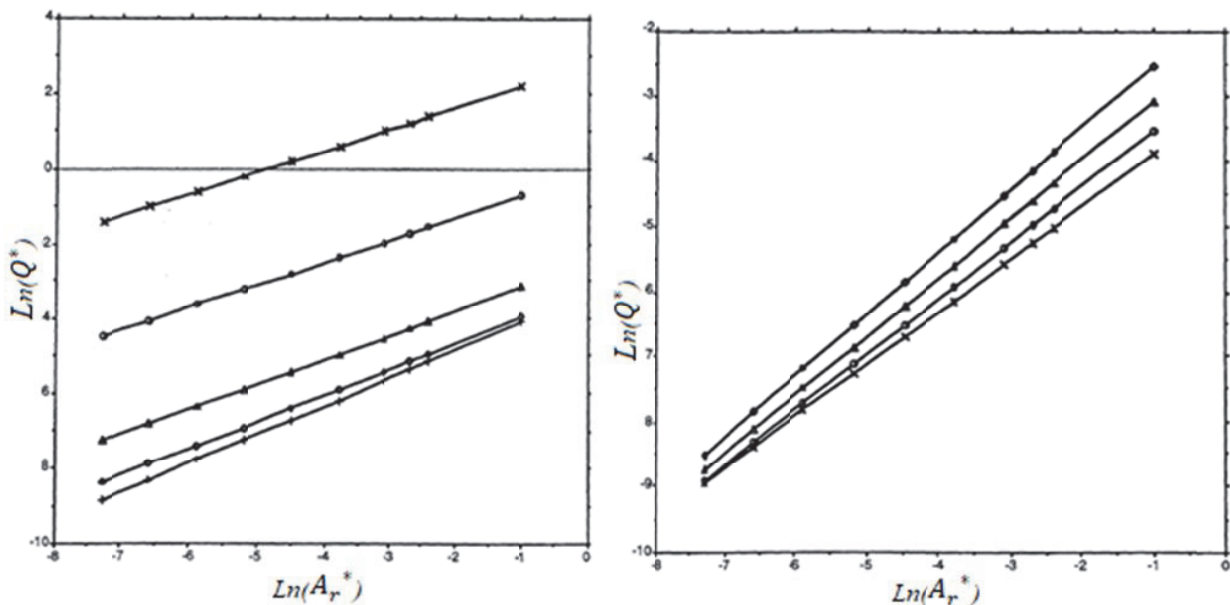


Рис. 4. Отношение нормированной скорости изнашивания к нормированной площади контакта для диапазонов фрактальной размерности

вываясь на общепринятых данных и экспериментальных результатах. На рисунке 3 и 4 показаны графики зависимости $\ln(Q^*)$ от $\ln(A_r^*)$ для различных значений D .

Следующие результаты представлены в таблице 1.

На рисунке 5 показано, что при увеличении D с 1,15 до 1,5, Q^* уменьшается и эта зависимость нелинейная. При увеличении D с 1,6 до 1,9, Q^* увеличивается. Видно, что есть две области D , которые в 4 раза отличаются по скорости износа. В первой области, для D между 1,15 и 1,5, Q^* уменьшается с увеличением D . Во второй области, для D между 1,6 и 1,9, Q^* увеличивается с увеличением D .

Такое поведение скорости износа в областях с двумя фрактальными размерами можно объяснить следующим образом. При увеличении D от 1,15 до 1,5 соответствующая кривая площади опоры сдвигается выше. Это означает, что в поверхностном контакте участвует большая площадь. При одинаковой нагрузке нормальное контактное давление между соприкасающимися поверхностями уменьшается с увеличением D , поэтому скорость износа становится меньше. При увеличении D от 1,6 до 1,9 количество выступов на единицу площади поверхности увеличивается, и, соответственно, кончики выступов становятся острее и слабее. Поэтому, несмотря на то, что нормальное контактное давление

Таблица 1. Скорость изнашивания $Ln(Q^*)$ для различных значений параметра D

$Ln(A_r^*)/D$		1	2	3	4	5	6	7	8	9
		1,15	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
1	-7,34	-1,84	-4,38	-7,84	-8,84	-9,34	-8,56	-8,86	-9,16	-9,46
2	-6,58	-1,56	-4,17	-7,56	-8,56	-9,06	-7,93	-8,23	-8,53	-8,83
3	-5,87	-0,86	-3,96	-6,86	-7,86	-8,36	-7,31	-7,61	-7,91	-8,21
4	-5,24	-0,24	-3,24	-6,24	-7,24	-7,74	-6,68	-6,98	-7,28	-7,58
5	-4,52	0,28	-2,72	-5,72	-6,72	-7,22	-6,04	-6,34	-6,64	-6,94
6	-3,82	0,63	-2,37	-5,37	-6,37	-6,87	-5,43	-5,73	-6,03	-6,33
7	-3,11	1,18	-1,82	-4,82	-5,82	-6,32	-4,84	-5,14	-5,44	-5,74
8	-2,56	1,29	-1,71	-4,71	-5,71	-6,21	-4,46	-4,76	-5,06	-5,36
9	-2,28	1,44	-1,56	-4,56	-5,56	-6,06	-4,31	-4,61	-4,91	-5,21
10	-1	1,98	-1,02	-4,02	-5,02	-5,52	-2,86	-3,16	-3,46	-3,76

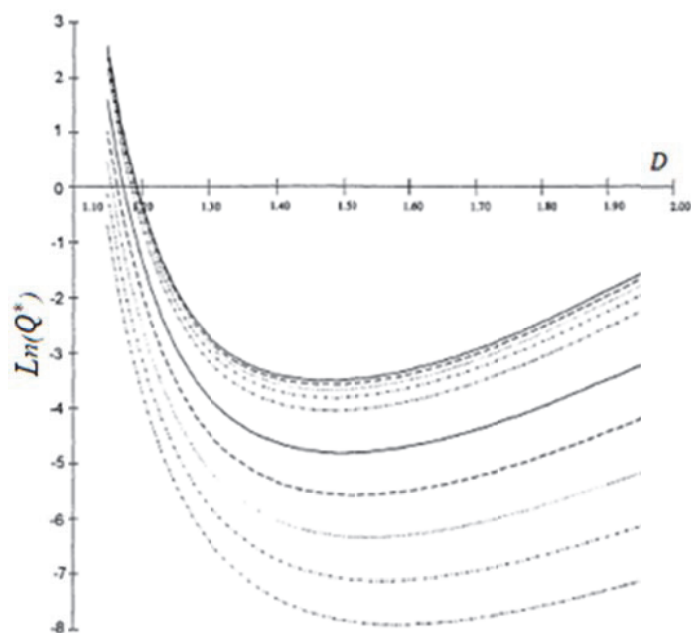


Рис. 5. Зависимость нормированной скорости изнашивания от фрактальной размерности

уменьшается с увеличением D , это приводит к увеличению скорости изнашивания.

В дальнейшем, опираясь на приведенные результаты, фрактальная геометрия может быть использована для анализа процессов износа при проведении натуральных экспериментов. С помощью компьютерной модели было установлено, что существуют две области D , в которых скорость изнашивания имеет различное поведение. В первой области с увеличением D , скорость изнашивания уменьшается, примерно в 3,5 раза, а во второй области при увеличе-

нии D , скорость изнашивания увеличивается, примерно в 1,3 раза. Это явление объясняется способностью поверхности поддерживать контакт. Кроме того, модель позволяет прогнозировать изменение скорости изнашивания, которая монотонно возрастает при увеличении амплитуды колебаний G или уменьшении постоянной материала W . Поскольку существует прямая зависимость, модель предоставляет удобное средство для использования фрактальных параметров D для прогнозирования скорости изнашивания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сосенушкин, Е.Н.* Применение методов искусственного интеллекта для компьютерного моделирования фрактальных поверхностей / Е.Н. Сосенушкин, Е.А. Яновская, А.С. Желнов // Известия Самарского научного центра РАН – 2024. – № 1. – С. 109–115.
2. *Дэвид Фостер.* Генеративное глубокое обучение. Творческий потенциал нейронных сетей. – СПб.: Питер, 2020. – 336 с.
3. *Гафаров, Ф.М.* Искусственные нейронные сети и приложения: учеб. пособие / Ф.М. Гафаров, А.Ф. Галимзянов. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2018. – 121 с.
4. *Тихомиров, В.П.* Развитие трибологии / В.П. Тихомиров, В.В. Гриб // Вестник Брянского технического университета – 2018. – № 12 (73). – С.14–23.
5. *Wang, S.* A fractal theory of the interfacial temperature distribution in the slow sliding regime. Part 1. Elastic contact and heat transfer analysis/ S. Wang, K. Komvopoulos// Trans. ASME. Journal of Tribology. 1994. N 116. P.812-823.
6. *Корн, Г.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. Определения, теоремы, формулы/ Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1970. – 720 с.
7. *Раменская, А.В.* Метод Монте-Карло и инструментальные средства его реализации: методические указания / А.В. Раменская, К.В. Пивоварова. – Оренбург: ОГУ, 2018. – 58 с.
8. *Михайлов, Г. А.* Статистическое моделирование. Методы Монте-Карло: учебное пособие для вузов / Г.А. Михайлов, А.В. Войтишек. – М.: Юрайт, 2024. – 323 с.
9. *Сосенушкин, Е.Н.* Математическая модель адгезионного износа штампов объемной штамповки/ Е.Н. Сосенушкин, А.В. Хроменков, Ю.А. Мельник // Трение и износ. – 2014. – Т.35. – № 6. – С. 752-758.
10. *Сосенушкин, Е.Н.* Прогрессивные процессы объемной штамповки/ Е.Н. Сосенушкин. – М.: Машиностроение, 2011. – 480 с.
11. *Богатов, А.А.* Механические свойства и модели разрушения металлов: Учебное пособие для вузов/ А.А. Богатов. – Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2002. – 329 с.
12. *Горячева, И.Г.* Моделирование усталостного изнашивания эластомеров/ И.Г. Горячева, Ф.И. Степанов, Е.В. Торская // Физическая мезомеханика. – 2018. – Т.21. – №.6. – С. 66-74.
13. *Степанский, Л.Г.* Прогнозирование надежности технологических процессов, инструмента и машин в обработке металлов давлением/ Л.Г. Степанский. – М.: Модерат, 2015. – 287 с.
14. *Сосенушкин, Е.Н.* Оценка изнашивания штампов для объемного деформирования по критерию пластического смятия контактной поверхности / Е.Н. Сосенушкин, А.Е. Сосенушкин, А.В. Хроменков // Вестник машиностроения. – 2017. – №7. – С. 59-63.
15. *Archard, J.F.* Wear theory and mechanisms/ J.F. Archard, M.B. Peterson, W.O. Winer (eds) Wear Control Handbook. ASME. New York, 1980. – P. 35-80.
16. *Чижиков, Ю.М.* Теория подобия и моделирование процессов обработки давлением/ Ю.М. Чижиков. – М.: Металлургия, 1970. – 296 с.
17. *Трофимова, Е.А.* Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие / Е. А. Трофимова, Н. В. Кисляк, Д. В. Гилёв; [под общ. ред. Е. А. Трофимовой]. – М-во образования и науки Рос. Федерации, Урал. федер. ун-т. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2018. – 160 с.

COMPUTER MODELING OF FRACTAL SURFACES GENERATED USING ARTIFICIAL INTELLIGENCE METHODES FOR WEAR PREDICTION

© 2024 E. N. Sosenushkin, E. A. Yanovskaya, A. S. Zhelnov

Moscow State Technological University «STANKIN», Moscow, Russia

Surface wear is the process of surface deterioration due to the effects of contact stresses. As a measure of damage or removal of material from a solid surface, wear can be thought of as the result of mechanical, thermal, and chemical action on the surface. When two rough, nominally flat surfaces come close together, the roughness of the surface causes contact to occur in separate contact patches. The true contact area is the sum of the areas of the individual contact spots. For most metals under normal loads, it is only a few percent of the apparent contact area. Typical surface deformation patterns are either elastic, plastic, or elasto-plastic and can be represented as functions of surface and material constants. The proposed work considers the application of fractal models derived using artificial intelligence techniques for wear prediction to study the effect of fractal surface parameters on wear rate.

Keywords: fractal surfaces; artificial intelligence; surface wear; computer modeling; machine learning.

DOI: 10.37313/1990-5378-2024-26-4-143-149

EDN: DXHZSQ

REFERENCES

1. *Sosenushkin, E.N.* Primenenie metodov iskusstvennogo intellekta dlya komp'yuternogo modelirovaniya fraktal'nyh poverhnostej / E.N. Sosenushkin, E.A. Yanovskaya, A.S. Zhelnov// Izvestiya Samarskogo nauchnogo centra RAN – 2024. – № 1. – S. 109–115
2. *Devid Foster.* Generativnoe glubokoe obuchenie. Tvorcheskij potencial nejronnyh setej. – SPb.: Piter, 2020. – 336 s.
3. *Gafarov, F.M.* Iskusstvennye nejronnye seti i

- prilozheniya: ucheb. posobie / F.M. Gafarov, A.F. Galimyanov. – Kazan': Izd-vo Kazan. un-ta, 2018. – 121 s.
4. *Tihomirov, V.P.* Razvitie tribologii / V.P. Tihomirov, V.V. Grib // Vestnik Bryanskogo tekhnicheskogo universiteta – 2018. – № 12 (73). – S.14–23.
 5. *Wang, S.* A fractal theory of the interfacial temperature distribution in the slow sliding regime. Part 1. Elastic contact and heat transfer analysis/ S. Wang, K. Komvopoulos// Trans. ASME. Journal of Tribology. 1994. N 116. P.812-823.
 6. *Korn, G.* Spravochnik po matematike dlya nauchnyh rabotnikov i inzhenerov. Opredeleniya, teoremy, formuly/ G. Korn, T. Korn. – M.: Nauka, 1970. – 720 s.
 7. *Ramenskaya, A.V.* Metod Monte-Karlo i instrumental'nye sredstva ego realizacii: metodicheskie ukazaniya / A.V. Ramenskaya, K.V. Pivovarova. – Orenburg: OGU, 2018. – 58 s.
 8. *Mihajlov, G.A.* Statisticheskoe modelirovanie. Metody Monte-Karlo: uchebnoe posobie dlya vuzov / G.A. Mihajlov, A.V. Vojtishchik. – M.: Yurajt, 2024. – 323 s.
 9. *Sosenushkin, E.N.* Matematicheskaya model' adgezionnogo iznosa shtampov ob'emnoj shtampovki/ E.N. Sosenushkin, A.V. Hromenkov, Yu.A. Mel'nik // Trenie i iznos. – 2014. – T.35. – № 6. – S. 752-758.
 10. *Sosenushkin, E.N.* Progressivnye processy ob'emnoj shtampovki/ E.N. Sosenushkin. – M.: Mashinostroenie, 2011. – 480 s.
 11. *Bogatov, A.A.* Mekhanicheskie svojstva i modeli razrusheniya metallov: Uchebnoe posobie dlya vuzov/ A.A. Bogatov. – Ekaterinburg: GOU VPO UGTU-UPI, 2002. – 329 s
 12. *Goryacheva, I.G.* Modelirovanie ustalostnogo iznashivaniya elastomerov/ I.G. Goryacheva, F.I. Stepanov, E.V. Torskaya // Fizicheskaya mezomekhanika. – 2018. – T.21. – №.6. – S.66-74.
 13. *Stepanskij, L.G.* Prognozirovaniye nadezhnosti tekhnologicheskikh processov, instrumenta i mashin v obrabotke metallov davleniem/ L.G. Stepanskij. – M.: Moderat, 2015. – 287 s.
 14. *Sosenushkin, E.N.* Ocenka iznashivaniya shtampov dlya ob'emnogo deformirovaniya po kriteriyu plasticheskogo smyatiya kontaktnoj poverhnosti / E.N. Sosenushkin, A.E. Sosenushkin, A.V. Hromenkov // Vestnik mashinostroeniya. – 2017. – №7. – S.59-63.
 15. *Archard, J.F.* Wear theory and mechanisms/ J.F. Archard, M.B. Peterson, W.O. Winer (eds) Wear Control Handbook. ASME. New York, 1980. – P. 35-80.
 16. *Chizhikov, Yu.M.* Teoriya podobiya i modelirovanie processov obrabotki davleniem/ YU.M. CHizhikov. – M.: Metallurgiya, 1970. – 296 s.
 17. *Trofimova, E.A.* Teoriya veroyatnostej i matematicheskaya statistika: ucheb. posobie / E.A. Trofimova, N.V. Kislyak, D.V. Gilyov; [pod obshch. red. E. A. Trofimovoj]. – M-vo obrazovaniya i nauki Ros. Federacii, Ural. feder. un-t. – Ekaterinburg: Izd-vo Ural. un-ta, 2018. – 160 s.

Evgeny Sosenushkin, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Plastic Deformation Systems. E-mail: sen@stankin.ru

Elena Yanovskaya, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics. E-mail: elena_yanovskaya@bc.ru

Andrey Zhelnov, Lecturer of the Department of Applied Mathematics. E-mail: a.zhelnov@stankin.ru