

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЖИМАЕМЫХ ОДНОМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ПОЛУЛАГРАНЖЕВОГО ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА ГОДУНОВА БЕЗ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ВЯЗКОСТИ ДЛЯ УДАРНЫХ ВОЛН

© 2024 В.В. Никонов

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева,
г. Самара, Россия

Статья поступила в редакцию 26.04.2024

Одним из наиболее важных и сложных эффектов при моделировании течения сжимаемой жидкости является механизм распознавания ударных волн. Было предложено множество методов типа Эйлера с высоким разрешением для точного разрешения масштабов плавного потока и одновременного выявления разрывов. Одним из недостатков этих методов является численная вязкость на ударных волнах. При проходе ударной волны параметры потока резко изменяются на расстоянии, равном длине свободного пробега молекулы газа, что значительно меньше размера ячейки расчетной сетки. Из-за численной вязкости вышеупомянутые методы типа Эйлера растягивают изменение параметров ударной волны на несколько ячеек сетки. В данной работе предлагается полулагранжев метод Годунова без численной вязкости для ударных волн. Другой хорошо известный подход - это метод характеристик, который не имеет числовой вязкости и использует инварианты Римана или решатели для моделирования явления гидроудара, но в его формулировке обычно пренебрегают конвективными членами. Здесь используется аналогичный подход для решения одномерных уравнений Эйлера, но уравнения разбиваются на части, описывающие конвекцию и акустические процессы отдельно, с соответствующими разными шагами по времени. При этом дополнительно используется итерационный точный решатель Годунова, поскольку инварианты Римана не сохраняются для умеренных и сильных скачков в идеальном газе. Предлагаемый метод относится к группе методов частиц в ячейке - particle-in-cell (PIC). Насколько известно автору, на момент выхода его первой статьи в 2011 г., посвященной данному методу, подобных численных схем PIC, использующих итерационный точный решатель Годунова, не существовало. В ударных волнах для предложенного метода свойства течения изменяются мгновенно (с точностью, зависящей от размера ячейки сетки). В данной статье описано дальнейшее развитие численной схемы предложенного метода, а именно единая математическая формулировка для расширенного набора тестовых задач, рассмотренных во второй статье автора от 2022 г. В то время, как в статье 2022 г. использовался линейный закон распределения параметров течения для волны разрежения при моделировании задачи Шу и Ошера для снижения паразитных колебаний и нелинейный закон, полученный из инвариантов Римана, для остальных тестовых задач. Полученные результаты численного анализа для данных случаев (например, стандартная задача Сода об ударной трубе, задача Лакса в формулировке Римана, задача Шу и Ошера об ударной трубе) сравниваются с точным решением и данными статьи от 2022 г. Итерационный точный решатель Годунова определяет точность предлагаемого метода для разрывов потока. В расчетах использовалось условие завершения итерации менее 10^{-5} для нахождения разницы давлений между текущей и предыдущей итерациями.

Ключевые слова: газ, ударная волна, задача Римана, метод Годунова, подход Лагранжа, численная вязкость

DOI: 10.37313/1990-5378-2024-26-3-147-163

EDN: FYDXLA

ВВЕДЕНИЕ

Моделирование сжимаемых течений является сложной задачей из-за наличия разрывов, например ударных и контактных волн, а также широкополосные масштабы непрерывного течения. Было предложено множество схем с высоким разрешением для точного определения параметров плавного потока и одновременного выявления разрывов: метод искусственной вяз-

Никонов Валерий Владимирович, кандидат технических наук, доцент кафедры конструкции и проектирования летательных аппаратов. E-mail: nikonov.vv@ssau.ru

кости [1, 2], метод уменьшения полной вариации (TVD) [3], существенно бесколебательная схема (ENO) [4] и взвешенная существенно бесколебательная схема (WENO) [5].

Метод ENO изучался Хартемом и др. в работах [4, 6–8]. Это был первый успешный метод высокого порядка для пространственной дискретизации гиперболических законов сохранения, обладающий свойством ENO. Это свойство считается очень полезным при численном моделировании гиперболических законов сохранения, поскольку численные методы высокого порядка часто вызывают паразитные колебания, особенно вблизи

скачков или других разрывов. Пространственная дискретизация ENO конечного объема изучалась в [4], где было показано, что она имеет равномерную точность высокого порядка вплоть до местоположения любого разрыва. Позже Шу и Ошер [9, 10] разработали метод конечных разностей ENO. Основная идея метода ENO заключается в выборе трафарета точек интерполяции, позволяющего избежать появления колебаний. То есть выбирается шаблон, на котором решение меняется наиболее плавно, а затем аппроксимируется поток на границах ячеек с высоким порядком точности, избегая тем самым больших паразитных колебаний, вызванных интерполяцией данных через разрывы.

Позже методы WENO были представлены в [5, 11, 12] для устранения потенциальной численной неустойчивости при выборе трафаретов ENO. Методы WENO используют выпуклую комбинацию всех шаблонов-кандидатов ENO. Другими словами, методы WENO достигают более высокого порядка точности, чем методы ENO, в гладких областях, сохраняя при этом свойство ENO на разрывах.

Все упомянутые выше методы используют подход Эйлера к рассмотрению движения сжимаемой сплошной среды. Одним из недостатков данных методов [1-13] является большая численная вязкость на ударных волнах. Существуют методы [14-17], использующие точный решатель Римана, но являющиеся также методами Эйлера. Они тоже имеют численную вязкость на скачках уплотнения. Для решения этой проблемы Годунов и др. [14] предлагали использовать подвижные сетки, что существенно усложняет задачу, особенно при переходе к рассмотрению двумерных и трехмерных областей течения. Для сильно разреженных газов, в частности, применяется метод прямого моделирования Монте-Карло (DSMC), в численной схеме которого [18] используется факт о мгновенном изменении параметров течения на ударных волнах.

В этой статье используется полулагранжевый метод Годунова и фиксированная однородная сетка, чтобы устранить недостаток численной вязкости для скачков с помощью упрощенного подхода. В работе [19] автором был предложен метод, использующий подход Лагранжа к рассмотрению движения сжимаемой сплошной среды, и фиксированную однородную сетку. Позже в [20] была описана реализация граничных условий для твердой стенки. В этих работах было показано, что у данного метода отсутствует численная вязкость на ударных волнах. В предлагаемой работе предлагается модификация метода, описанного в [19], [20]. Основное нововведение заключается в изменении формулы, по которой рассчитывается плотность сплошной среды для волн разрежения. Показано, что данная формула позволяет получать хорошие результаты для всех видов тестовых задач, решенных в [19], [20].

В то время, как в предыдущей работе [20] для получения успешных результатов использовались две разные формулы: линейный закон распределения параметров потока в волне разрежения для задачи Шу и Ошер [21] об ударной трубе и нелинейный закон из [19] для остальных рассмотренных задач. Таким образом, в данной работе предлагается одна численная схема метода для решения ряда одномерных нестационарных задач сжимаемых невязких течений, рассмотренных в [19], [20].

1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И ИДЕЯ МЕТОДА

Уравнения Эйлера, описывающие одномерную задачу движения сжимаемой сплошной среды, в размерных переменных имеют вид [13]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{p}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь u – скорость, ρ – плотность, ε – внутренняя удельная энергия, p – давление, x – координата, t – время.

Система уравнений (1) замыкается с помощью уравнения состояния для идеального газа

$$p = (\kappa - 1) \rho \varepsilon, \quad (2)$$

где κ – показатель адиабаты.

Годунов [14] предложил итерационный решатель Римана, реализованный в конечно-разностной схеме. Вместо последней, другими исследователями позднее использовался метод контрольного объема. Напротив, мы используем подход Лагранжа.

В предыдущих работах [19], [20] предлагается следующий метод: этапы конвекции и акустики рассматриваются отдельно, а разбиение на физические процессы производится потому, что локальная акустическая скорость (скорость звука) может сильно отличаться от конвективной скорости потока. Таким образом, на акустическом этапе решается система

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{p}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

и уравнение (2). Система (3) получается из (1) отбрасыванием конвективных членов и может быть представлена в матричной форме следующим образом:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

где $[A]$ – матрица Якоби

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & \rho & 0 \\ (\kappa-1)\varepsilon & 0 & \kappa-1 \\ \rho & 0 & 0 \\ 0 & (\kappa-1)\varepsilon & 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Матрица $[A]$ может быть представлена в виде

$$[A] = [R][\Lambda][L], \quad (6)$$

где $[\Lambda]$ – диагональная матрица собственных значений матрицы Якоби (5)

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} -c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Здесь c – скорость звука

$$c = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}}. \quad (8)$$

Матрица соответствующих левых собственных векторов $[L]$ определяется как

$$[L] = \begin{bmatrix} -\frac{c}{\kappa\rho} & 1 & -\frac{\kappa-1}{c} \\ 1 & 0 & -\frac{\kappa\rho}{c^2} \\ \frac{c}{\kappa\rho} & 1 & \frac{\kappa-1}{c} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

а матрица правых собственных векторов $[R]$ будет равна

$$[R] = \begin{bmatrix} -\frac{\rho}{2c} & \frac{\kappa-1}{\kappa} & \frac{\rho}{2c} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{c}{2\kappa} & -\frac{(\kappa-1)\varepsilon}{\kappa\rho} & \frac{c}{2\kappa} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Так как

$$[L][R] = [E], \quad (11)$$

где $[E]$ – единичная диагональная матрица. Умножение системы уравнений (4) слева на матрицу $[L]$ и использование уравнения (11) даёт

$$[L] \begin{Bmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \end{Bmatrix} = [\Lambda][L] \begin{Bmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \end{Bmatrix}. \quad (12)$$

Если $[L] = [\text{const}]$, мы можем получить из (12) характеристическую форму

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial t} - c \frac{\partial w_1}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial w_2}{\partial t} &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{\partial w_3}{\partial t} + c \frac{\partial w_3}{\partial x} = 0$$

где

$$\begin{aligned} w_1 &= -\frac{c^*}{\kappa\rho^*} \rho + u - \frac{\kappa-1}{c^*} \varepsilon, \\ w_2 &= \rho - \frac{\kappa\rho^*}{c^{*2}} \varepsilon, \\ w_3 &= \frac{c^*}{\kappa\rho^*} \rho + u + \frac{\kappa-1}{c^*} \varepsilon. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь звездочка указывает на постоянные значения. Уравнение (13) описывает движение двух волн со скоростями $-c$ и c , и их соответствующими значениями переноса w_1 и w_3 (14).

Систему уравнений (13) можно решить, используя предложенный лагранжев подход. Однако в этой статье мы используем точный решатель Годунова для решения полной нелинейной системы (1), (2), а затем вычитаем конвективную скорость из решения, чтобы получить решение уравнения (3). Более подробное описание метода приводится ниже.

Шаг по времени Δt_c на этапе акустики выбирался согласно критерию Куранта:

$$\Delta t_c = k_c \frac{h}{c_s}, \quad (15)$$

где c_s – акустическая скорость ударной волны, а k_c – целое число. Если, например, $k_c = 3$, тогда ударная волна распространяется на три ячейки сетки на подшаге акустики.

На этапе конвекции решаем систему только с конвективными членами

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

также как систему уравнений (13).

Шаг по времени на стадии конвекции выбирался аналогичным (15) образом:

$$\Delta t_u = k_u \frac{h}{u_s} \quad (17)$$

где u_s – конвективная скорость ударной волны, а k_u – тоже целое число. Например, если $k_u = 2$, тогда ударная волна распространяется на две ячейки сетки на подшаге конвекции. Если $\Delta t_c \neq \Delta t_u$, тогда маршевый шаг Δt выбирается, как

$$\begin{aligned} \Delta t_c &= n_c \Delta t, \\ \Delta t_u &= n_u \Delta t, \end{aligned} \quad (18)$$

где n_c и n_u – целые числа.

2. СХЕМА МЕТОДА ДЛЯ ЭТАПА «АКУСТИКИ»

На этапе акустики решается система уравнений (3). Хотя мы не можем получить систему волновых уравнений (13) для нелинейных случаев, фундаментальные свойства решения линейной системы (13) сохраняются и для решения нелинейной системы (3). Решениями для нелинейной системы являются ударная волна или волна разрежения [14], как и для линейной системы. К сожалению, мы не знаем переменных w_1 и w_3 для нелинейной системы (3), но знаем точное решение задачи Римана с помощью метода Годунова [14] для нелинейной системы (1), (2). Обозначим это решение большими переменными: R_L и R_R – плотность, $U_L = U_R$ – скорость, E_L и E_R – внутренняя удельная энергия, $P_L = P_R$ – давление, и D_L и D_R – скорости распространения ударной волны или волны разрежения, где индексы L и R обозначают левую и правую области от границы между ячейками соответственно.

В предлагаемом методе переменные \underline{w}_1 и w_3 (14) заменяются на переменные $\underline{w}_1 = \{P_L, U_L, R_L, E_L\}$ и $\underline{w}_3 = \{P_R, U_R, R_R, E_R\}$, которые переносятся с локальными акустическими скоростями $C_L = D_L - U_L$ и $C_R = D_R - U_R$, соответственно.

Сначала нам нужно решить задачу Римана с помощью метода Годунова [14] для каждой пары ячеек (i и $i+1$) с данными ($\{p_i, u_i, \rho_i, \varepsilon_i\}$ и $\{p_{i+1}, u_{i+1}, \rho_{i+1}, \varepsilon_{i+1}\}$) соответственно. В резуль-

тате получаются значения больших переменных $\{P, U, R_L, E_L, D_L, R_R, E_R, D_R\}$, которые присваиваются ячейкам сетки следующим образом:

$$\begin{aligned} P_{L_{i+1}}^{k-1} &= P, U_{L_{i+1}}^{k-1} = U, R_{L_{i+1}}^{k-1} = R_L, \\ E_{L_{i+1}}^{k-1} &= E_L, C_{L_{i+1}}^{k-1} = D_L - U, \end{aligned} \quad (19)$$

которые представляют собой вектор \underline{w}_1 волны, распространяющейся в отрицательном направлении оси x (влево), и:

$$\begin{aligned} P_{R_i}^{k-1} &= P, U_{R_i}^{k-1} = U, R_{R_i}^{k-1} = R_R, \\ E_{R_i}^{k-1} &= E_R, C_{R_i}^{k-1} = D_R - U, \end{aligned} \quad (20)$$

которые представляют собой вектор волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси x (вправо). В случае волны разрежения переменная D задает скорость более медленной характеристики волны разрежения. Например, для правой волны разрежения D_R задается следующим образом:

$$D_R = U + c_{i+1} - \frac{(\kappa-1)}{2}(u_{i+1} - U), \quad (21)$$

где c_{i+1} – скорость звука для $i+1$ ячейки сетки определяется по формуле (8). Для левой волны разрежения D_L определяется как

$$D_L = U - c_i - \frac{(\kappa-1)}{2}(u_i - U). \quad (22)$$

Рассмотрим волну, распространяющуюся вдоль положительного направления оси x (вправо). Ячейки сетки рассматриваются парами. Координаты ячеек после переноса на этапе акустики для правой волны \underline{w}_3 определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_i + C_{R_i}^{k-1} \Delta t_c, \\ x_2 &= x_{i+1} + C_{R_{i+1}}^{k-1} \Delta t_c. \end{aligned} \quad (23)$$

Решение задачи ищется в следующем виде:

1) Если удовлетворяются условия

$$\left| P_{R_{i+1}}^{k-1} - P_{R_i}^{k-1} \right| < e_1, \left| C_{R_{i+1}}^{k-1} - C_{R_i}^{k-1} \right| < e_1, \quad (24)$$

то для всех ячеек сетки, для которых условие $x_1 \leq x_j \leq x_2$ выполнено, решение в последующий момент времени k тривиально и может быть задано следующим образом:

$$\begin{aligned} P_{R_j}^k &= \frac{1}{2}(P_{R_i}^{k-1} + P_{R_{i+1}}^{k-1}), U_{R_j}^k = \frac{1}{2}(U_{R_i}^{k-1} + U_{R_{i+1}}^{k-1}), \\ R_{R_j}^k &= \frac{1}{2}(R_{R_i}^{k-1} + R_{R_{i+1}}^{k-1}), E_{R_j}^k = \frac{1}{2}(E_{R_i}^{k-1} + E_{R_{i+1}}^{k-1}). \end{aligned} \quad (25)$$

2) Если удовлетворяется условия

$$\left(C_{R_{i+1}}^{k-1} - C_{R_i}^{k-1} \right) < -e_1 \text{ и } (x_2 - x_1) > e_2 \quad (26)$$

тогда мы имеем слабый скачок, который не догоняет решение из ячейки впереди. И решение записывается как:

$$\begin{aligned} P_{R_j}^k &= P_{R_i}^{k-1}, U_{R_j}^k = U_{R_i}^{k-1}, R_{R_j}^k = R_{R_i}^{k-1}, \\ E_{R_j}^k &= E_{R_i}^{k-1}, \text{ если } x_1 \leq x_j \leq (x_1 + x_2)/2 \\ P_{R_j}^k &= P_{R_{i+1}}^{k-1}, U_{R_j}^k = U_{R_{i+1}}^{k-1}, R_{R_j}^k = R_{R_{i+1}}^{k-1}, \\ E_{R_j}^k &= E_{R_{i+1}}^{k-1}, \text{ если } (x_1 + x_2)/2 < x_j \leq x_2; \end{aligned} \quad (27)$$

3) Если

$$(C_{R_{i+1}}^{k-1} - C_{R_i}^{k-1}) \geq e_1, \quad (28)$$

тогда,

3.1) если

$$(U_{R_{i+1}}^{k-1} - U_{R_i}^{k-1}) < e_1,$$

в этом случае мы имеем ударную волну.

3.1 а) Если

$$(x_1 - h/2) \leq x_j \leq (x_1 + h/2),$$

тогда

$$\begin{aligned} P_{R_j}^k &= P_{R_i}^{k-1}, U_{R_j}^k = U_{R_i}^{k-1}, \\ R_{R_j}^k &= R_{R_i}^{k-1}, E_{R_j}^k = E_{R_i}^{k-1}; \end{aligned} \quad (29)$$

3.1 б) если

$$(x_1 + h/2) < x_j \leq x_2,$$

тогда

$$\begin{aligned} P_{R_j}^k &= P_{R_{i+1}}^{k-1}, U_{R_j}^k = U_{R_{i+1}}^{k-1}, \\ R_{R_j}^k &= R_{R_{i+1}}^{k-1}, E_{R_j}^k = E_{R_{i+1}}^{k-1}. \end{aligned} \quad (30)$$

Такой вариант возможен благодаря следующему отношению локальной акустической скорости скачка к скорости звука невозмущенного потока перед его фронтом:

$$\frac{C_{R_i}^{k-1}}{C_{R_{i+1}}^{k-1}} = \frac{D_R - U}{c_R} = \frac{\rho_R}{R_R} \sqrt{\frac{(\kappa + 1)P}{2\kappa \rho_R} + \frac{\kappa - 1}{2\kappa}} \quad (31)$$

или

$$\frac{D_R - U}{c_R} = \frac{\rho_R}{R_R} \sqrt{\frac{(\kappa + 1)}{2\kappa} \left(\frac{\kappa + 1 - (\kappa - 1) \frac{\rho_R}{R_R}}{(\kappa + 1) \frac{\rho_R}{R_R} - (\kappa - 1)} \right) + \frac{\kappa - 1}{2\kappa}}. \quad (32)$$

Из графического анализа этого отношения оказалось, что для слабых ударных волн оно будет меньше единицы, а затем неограниченно возрастать.

В частности, к варианту «3.1)» относится тестовый пример ударной волны, рассмотренный Содом [22].

3.2) Если

$$(U_{R_{i+1}}^{k-1} - U_{R_i}^{k-1}) \geq e_1,$$

тогда имеем волну разрежения и решение для $x_1 \leq x_j \leq x_2$ определяется из инвариантов Римана для уравнений Эйлера имеет вид:

$$U_{R_j}^k = U_{R_i}^{k-1} + \frac{U_{R_{i+1}}^{k-1} - U_{R_i}^{k-1}}{x_2 - x_1} (x_j - x_1), \quad (33)$$

$$E_{R_j}^k = \left(\sqrt{E_{R_i}^{k-1}} + \frac{\sqrt{E_{R_{i+1}}^{k-1}} - \sqrt{E_{R_i}^{k-1}}}{x_2 - x_1} (x_j - x_1) \right)^2, \quad (34)$$

$$R_{R_j}^k = \left(R_{R_i}^{k-1} \left(\frac{E_{R_j}^k}{E_{R_i}^{k-1}} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} + R_{R_{i+1}}^{k-1} \left(\frac{E_{R_j}^k}{E_{R_{i+1}}^{k-1}} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \right) / 2, \quad (35)$$

$$P_{R_j}^k = (\kappa - 1) R_{R_j}^k E_{R_j}^k. \quad (36)$$

Вычисление формул (33-36) производилось в алгоритмах программ, использовавшихся в работах [19] и [20]. Причем в [20] при моделировании задачи Шу и Ошера вместо формул (34) и (35) использовался линейный закон распределения, как в формуле (33), но для величин энергии $E_{R_j}^k$ и плотности $R_{R_j}^k$. В данной работе также используются формулы (33), (34), (36), а вместо формулы (35) применяется выражение

$$R_{R_j}^k = \left((R_{R_i}^{k-1})^{\frac{\kappa-1}{2}} + \frac{(R_{R_{i+1}}^{k-1})^{\frac{\kappa-1}{2}} - (R_{R_i}^{k-1})^{\frac{\kappa-1}{2}}}{x_2 - x_1} (x_j - x_1) \right)^{\frac{2}{\kappa-1}}, \quad (37)$$

которое можно получить из (34), используя формулу (2) и изоэнтропическую адиабату. Далее будет показано, что применение формулы (37) вместо (35) позволяет получить универсальную схему метода, с помощью которой получаются такие же хорошие результаты, как в работах [19] и [20]. При этом паразитные колебания в случае использования формулы (35) при решении задачи Шу и Ошера не возникают.

При выполнении условий 1)-3), если оказывается, что в ячейку сетки на данном подшаге уже было записано решение, то оно заменяется «новым», полученным из решения задачи о распаде разрыва. При этом уже записанное решение будет с индексом R, следующее решение, пришедшее в эту ячейку, будет с индексом L. Полученное «новое» решение берется из результата задачи Римана с индексом R. Кроме того, при записи решения в ячейки сетки также проверяется условие, чтобы распространение данных решений с местной «акустической» скоростью не обгоняло (не затирало) решение впереди идущей ударной волны, если таковая существует.

Для волны, бегущей в отрицательном направлении оси x (влево) и переносящей величины $\overline{w}_1 = \{P_L, U_L, R_L, E_L\}$, условия и выражения получаются аналогичным образом.

После перемещения левой и правой волн в каждой ячейке сетки мы имеем наборы величин $\overline{w}_1 = \{P_L^k, U_L^k, R_L^k, E_L^k\}$

и $\bar{w}_3 = \{P_R^k, U_R^k, R_R^k, E_R^k\}$, а также решение с прошлого подшага по времени $\{p^{k-1}, u^{k-1}, \rho^{k-1}, \varepsilon^{k-1}\}$ (см. рисунок 1), для которых три раза запускается решатель Римана. Первый раз для данных $\bar{w}_3 = \{P_R^k, U_R^k, R_R^k, E_R^k\}$ слева и $\{p^{k-1}, u^{k-1}, \rho^{k-1}, \varepsilon^{k-1}\}$ справа (см. рисунок 2), полученное правое решение записывается в данные третьей задачи слева (см. рисунок 4). Второй раз для данных $\{p^{k-1}, u^{k-1}, \rho^{k-1}, \varepsilon^{k-1}\}$ слева и $\bar{w}_1 = \{P_L^k, U_L^k, R_L^k, E_L^k\}$ справа (см. рисунок 3), полученное левое решение записывается в данные третьей задачи справа (см. рисунок 4). И третий раз для данных, указанных выше (см. рисунок 4). В результате снова получаем значения «больших» переменных $\{P^{k*}, U^{k*}, R_L^{k*}, E_L^{k*}, R_R^{k*}, E_R^{k*}\}$.

Так как давление и конвективная скорость не испытывают скачки в распаде разрыва, то их значения после этапа «акустики» определяются как

$$p_{ci}^k = P_i^{k*}, u_{ci}^k = U_i^{k*}. \quad (38)$$

Значения для плотности и энергии выбираются следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_{ni}^k &= R_{Ri}^{k*}, \varepsilon_{ni}^k = E_{Ri}^{k*}, \text{ если } U_i^{k*} \geq 0, \\ \rho_{ni}^k &= R_{Li}^{k*}, \varepsilon_{ni}^k = E_{Li}^{k*}, \text{ если } U_i^{k*} < 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Решение $\{p_c^k, u_c^k, \rho_c^k, \varepsilon_c^k\}$ этапа «акустики» получено.

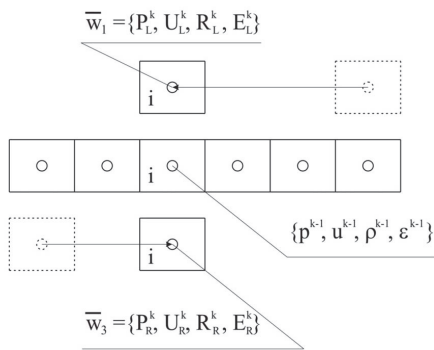


Рис. 1. Начальные условия для трех задач Римана

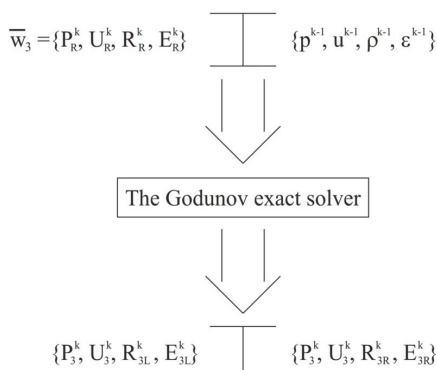


Рис. 2. Первая задача Римана

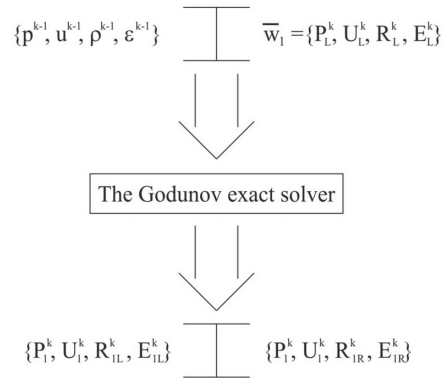


Рис. 3. Вторая задача Римана

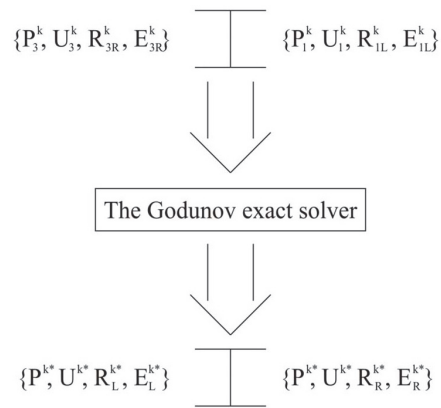


Рис. 4. Третья задача Римана

3. СХЕМА МЕТОДА ДЛЯ ЭТАПА КОНВЕКЦИИ

На этапе конвекции решается система уравнений (2) и (16). В предлагаемом методе вектор величин $\{p_u^{k-1}, u_u^{k-1}, \rho_u^{k-1}, \varepsilon_u^{k-1}\} = \{p_c^k, u_c^k, \rho_c^k, \varepsilon_c^k\}$ переносится с местной конвективной скоростью u_c^k , то есть результаты расчета этапа «акустики» являются начальными данными для этапа конвекции. На этапе конвекции ячейки также рассматриваются попарно. Координаты ячеек после перемещения на этапе конвекции определяются как

$$\begin{aligned} x_1 &= x_i + u_{ui}^{k-1} \Delta t_u, \\ x_2 &= x_{i+1} + u_{ui+1}^{k-1} \Delta t_u. \end{aligned} \quad (40)$$

Далее мы опустим индекс u , понятно, что здесь переменные относятся к этапу конвекции.

Решения задачи на этапе конвекции отыскиваются в следующем виде:

1) если выполняются условия

$$|u_{i+1} - u_i| < e_1, |\rho_{i+1} - \rho_i| < e_1, |\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i| < e_1, \quad (41)$$

то для всех ячеек сетки, для которых выполняется условие $x_1 \leq x_j \leq x_2$, решение в следующий момент времени k будет тривиальным

$$p_j^k = \frac{1}{2}(p_i^{k-1} + p_{i+1}^{k-1}), u_j^k = \frac{1}{2}(u_i^{k-1} + u_{i+1}^{k-1}),$$

$$\rho_j^k = \frac{1}{2}(\rho_i^{k-1} + \rho_{i+1}^{k-1}), \quad \varepsilon_j^k = \frac{1}{2}(\varepsilon_i^{k-1} + \varepsilon_{i+1}^{k-1}). \quad (42)$$

При записи решения (42) в ячейки сетки отдельно проверяется условие, чтобы распространение данного решения со скоростью конвекции не обгоняло (не затирало) решение впереди идущей ударной волны, если таковая существует. Для этого в начале этапа конвекции определяются положения границ всех ударных волн в следующий момент времени.

2) Если выполняется условие

$$(u_{i+1} - u_i) < e_1, \quad (43)$$

то имеем ударную волну.

2.1) Если

$$(x_2 - x_1) > e_2, \quad (44)$$

то решение определится как:

а) если

$$x_1 \leq x_j \leq (x_1 + x_2) / 2,$$

тогда

$$\rho_j^k = \rho_i^{k-1}, \quad u_j^k = u_i^{k-1}, \quad \rho_j^k = \rho_i^{k-1}, \quad \varepsilon_j^k = \varepsilon_i^{k-1}; \quad (45)$$

б) если

$$(x_1 + x_2) / 2 < x_j \leq x_2,$$

тогда

$$\rho_j^k = \rho_{i+1}^{k-1}, \quad u_j^k = u_{i+1}^{k-1}, \quad \rho_j^k = \rho_{i+1}^{k-1}, \quad \varepsilon_j^k = \varepsilon_{i+1}^{k-1}; \quad (46)$$

2.2) если

$$(x_2 - x_1) \leq e_2, \quad (47)$$

тогда

а) если

$$|p_{i+1}^{k-1} - p_i^{k-1}| < e_1,$$

то сначала определяется граница разрыва

$$x = x_i + h / 2 + (u_i^{k-1} + u_{i+1}^{k-1})_{\Delta} t_c, \quad (48)$$

затем в ячейку j слева от границы разрыва записывается решение

$$\rho_j^k = \rho_i^{k-1}, \quad u_j^k = u_i^{k-1}, \quad \rho_j^k = \rho_i^{k-1}, \quad \varepsilon_j^k = \varepsilon_i^{k-1}, \quad (49)$$

а в ячейку $j+1$ справа от границы разрыва записываются величины

$$\rho_j^k = \rho_{i+1}^{k-1}, \quad u_j^k = u_{i+1}^{k-1}, \quad \rho_j^k = \rho_{i+1}^{k-1}, \quad \varepsilon_j^k = \varepsilon_{i+1}^{k-1}, \quad (50)$$

б) если

$$|p_{i+1}^{k-1} - p_i^{k-1}| \geq e_1,$$

решение определится как

- если

$$p_i^{k-1} > p_{i+1}^{k-1} \text{ и } (x_1 - h / 2) \leq x_j \leq (x_1 + h / 2),$$

тогда

$$\rho_j^k = \rho_i^{k-1}, \quad u_j^k = u_i^{k-1}, \quad \rho_j^k = \rho_i^{k-1}, \quad \varepsilon_j^k = \varepsilon_i^{k-1}, \quad (51)$$

- если

$$p_i^{k-1} < p_{i+1}^{k-1} \text{ и } (x_2 - h / 2) \leq x_j \leq (x_2 + h / 2),$$

тогда

$$\rho_j^k = \rho_{i+1}^{k-1}, \quad u_j^k = u_{i+1}^{k-1}, \quad \rho_j^k = \rho_{i+1}^{k-1}, \quad \varepsilon_j^k = \varepsilon_{i+1}^{k-1}. \quad (52)$$

3) Если

$$(u_{i+1} - u_i) \geq e_1, \quad (53)$$

имеем волну разрежения и решение для $x_1 \leq x_j \leq x_2$ определяется из условия сохранения инвариантов Римана

$$u_j^k = u_i^{k-1} + \frac{u_{i+1}^{k-1} - u_i^{k-1}}{x_2 - x_1} (x_j - x_1), \quad (54)$$

$$\varepsilon_j^k = \left(\sqrt{\varepsilon_i^{k-1}} + \frac{\sqrt{\varepsilon_{i+1}^{k-1}} - \sqrt{\varepsilon_i^{k-1}}}{x_2 - x_1} (x_j - x_1) \right)^2, \quad (55)$$

$$\rho_j^k = \left(\rho_i^{k-1} \left(\frac{\varepsilon_j^k}{\varepsilon_i^{k-1}} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} + \rho_{i+1}^{k-1} \left(\frac{\varepsilon_j^k}{\varepsilon_{i+1}^{k-1}} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \right) / 2, \quad (56)$$

$$p_j^k = (\kappa - 1) \rho_j^k \varepsilon_j^k. \quad (57)$$

Вычисление формул (54-57) производилось в алгоритмах программ, использовавшихся в работах [19] и [20]. Причем в [20] при моделировании задачи Шу и Ошера вместо формул (55) и (56) использовался линейный закон распределения, как в формуле (54), но для величин энергии ε_j^k и плотности ρ_j^k . В данной работе также используются формулы (54), (55), (57), а вместо формулы (56) применяется выражение

$$\rho_j^k = \left(\left(\rho_i^{k-1} \right)^{\frac{\kappa-1}{2}} + \frac{\left(\rho_{i+1}^{k-1} \right)^{\frac{\kappa-1}{2}} - \left(\rho_i^{k-1} \right)^{\frac{\kappa-1}{2}}}{x_2 - x_1} (x_j - x_1) \right)^{\frac{2}{\kappa-1}}, \quad (58)$$

которое аналогично формуле (37). Далее будет показано, что применение формулы (58) вместо (56) позволяет получить универсальную схему метода, с помощью которой получаются такие же хорошие результаты, как в работах [19] и [20]. При этом паразитные колебания в случае использования формулы (56) при решении задачи Шу и Ошера не возникают.

При выполнении условий 1)-3), если оказывается, что в ячейку сетки на данном подшаге уже было записано решение, то оно заменяется «новым», когда давление «нового» решения больше давления решения уже имеющегося в ячейке сетки.

4. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ТВЕРДОЙ СТЕНКИ

Основная идея состоит в механизме отражения волн от твердой стенки. Пусть на этапе «акустики», при выполнении условий 1) - 3), волна $\vec{w}_3 = \{P_R, U_R, R_R, E_R\}$ движется вправо со ско-

ростью C_R и встречает твердую стенку, тогда она отражается от нее, «превращаясь» в волну $\overline{w}_1 = \{P_R, -U_R, R_R, E_R\}$, которая движется влево от стенки со скоростью $-C_R$. При этом, при распределении величин, переносимых волной \overline{w}_1 , в ячейки сетки, решается задача о распаде разрыва методом Годунова, где переменными слева будут уже записанные в ячейке данные, а переменными справа $\overline{w}_1 = \{P_R, -U_R, R_R, E_R\}$. В результате получаются новые значения больших переменных $\{P^*, U^*, R_L^*, E_L^*, D_L^*, R_R^*, E_R^*, D_R^*\}$, которые записываются в ячейки сетки следующим образом

$$\begin{aligned} p_i^k &= P_i^*, u_i^k = U_i^*, \rho_i^k = R_{Li}^*, \\ \varepsilon_i^k &= E_{Li}^*, c_i^k = D_{Li}^* - U_i^*. \end{aligned} \quad (59)$$

Для волны $\overline{w}_1 = \{P_L, U_L, R_L, E_L\}$, которая после встречи со стенкой «превращается» в волну $\overline{w}_3 = \{P_L, -U_L, R_L, E_L\}$, аналогичные рассуждения приводят к результату

$$\begin{aligned} p_i^k &= P_i^*, u_i^k = U_i^*, \rho_i^k = R_{Ri}^*, \\ \varepsilon_i^k &= E_{Ri}^*, c_i^k = D_{Ri}^* - U_i^*. \end{aligned} \quad (60)$$

На этапе конвекции мы имеем одну волну, которая при встрече со стенкой меняет направление на обратное. Пусть, при выполнении условий 1) - 3) этапа конвекции, волна $\overline{w} = \{p^k, u^k, \rho^k, \varepsilon^k\}$ движется вправо со скоростью u^k и встречает твердую стенку, тогда она отражается от нее, «превращаясь» в волну $\overline{w} = \{p^k, -u^k, \rho^k, \varepsilon^k\}$, которая движется влево от стенки со скоростью $-u^k$. При этом, при распределении величин, переносимых волной \overline{w} , в ячейки сетки решается задача о распаде разрыва методом Годунова, где переменными слева будут уже записанные в ячейке данные, а переменными справа $\overline{w} = \{p^k, -u^k, \rho^k, \varepsilon^k\}$. В результате получают значения больших переменных $\{P^*, U^*, R_L^*, E_L^*, D_L^*, R_R^*, E_R^*, D_R^*\}$, которые записываются в ячейки сетки по формуле (59).

Если волна $\overline{w} = \{p^k, u^k, \rho^k, \varepsilon^k\}$ движется влево, то аналогичные рассуждения приводят к результату, описываемому формулой (60).

5. ТЕСТИРОВАНИЕ МЕТОДА

В этом разделе мы применяем, предложенный метод для решения задач с различными начальными (НУ) и граничными условиями (ГУ).

Первая тестовая задача была в свое время предложена Содом [22] и имеет следующие НУ:

$$p_j^0 = 1, u_j^0 = 0, \rho_j^k = 1, \text{ если } x_j < 0,$$

$$p_j^0 = 0.1, u_j^0 = 0, \rho_j^0 = 0.125, \text{ если } x_j \geq 0. \quad (61)$$

Область моделирования принималась равной $x \in [-4.5, 5.5]$, сетка содержала 100 ячеек, шаг сетки составлял $h = 0.1$. Шаг по времени для процесса «акустики» выбирался согласно критерию Куранта-Фридриха-Леви (15), где $k_c = 1$, т.е. ударная волна на этапе «акустики» перемещалась на одну ячейку сетки.

Шаг по времени для процесса конвекции выбирался по аналогичному правилу (17), где $k_u = 2$, т.е. ударная волна на этапе конвекции перемещалась на две ячейки сетки. Маршевый шаг равнялся $\Delta t = 0.02020929$. Этап «акустики» выполнялся через 6 шагов по времени, т.е. $\Delta t_c = 6 \Delta t$, этап конвекции – через 10 шагов $\Delta t_u = 10 \Delta t$.

Результаты расчетов после 110 маршевых шагов по времени показаны на рисунках 5-7 в сравнении с точным решением и данными предыдущей работы автора [20]. Графики показывают одинаковую точность для волны разрежения для предыдущего и модифицированного методов с сохранением отсутствия численной вязкости для ударных волн. Следует отметить, что из-за накопления ошибки округления ударная волна запаздывает в показанный момент времени на одну ячейку сетки для обоих методов.

НУ второй тестовой задачи Лакса [23] задавались следующим образом

$$p_j^0 = 3.52773, u_j^0 = 0.69888, \rho_j^k = 0.445, \text{ если } x_j < 0,$$

$$p_j^0 = 0.571, u_j^0 = 0, \rho_j^0 = 0.5, \text{ если } x_j \geq 0. \quad (62)$$

Область моделирования принималась равной $x \in [-8, 6]$, сетка содержала 140 ячеек, шаг сетки составлял $h = 0.1$. Шаг по времени для процесса «акустики» выбирался согласно критерию (15), где $k_c = 2$, т.е. ударная волна на этапе «акустики» перемещалась на две ячейки сетки. Шаг по времени для процесса конвекции выбирался по правилу (17), где $k_u = 3$, т.е. ударная волна на этапе конвекции перемещалась на три ячейки сетки. Маршевый шаг равнялся $\Delta t = 0.2$, этапы «акустики» и конвекции выполнялись на каждом шаге по времени, т.е. $\Delta t_c = \Delta t_u = \Delta t$.

Результаты расчетов в момент времени $t = 2.0$ показаны на рисунках 8-10 в сравнении с данными предыдущей работы автора [20]. Графики показывают совпадение результатов для предыдущего и модифицированного методов и отсутствие численной вязкости на ударных волнах. Как и в первом примере, из-за накопления ошибки округления сдвиговая волна запаздывает в показанный момент времени на одну ячейку сетки.

Третьей тестовой задачей является ударная труба Шу и Ошера. Данная задача [21] модели-

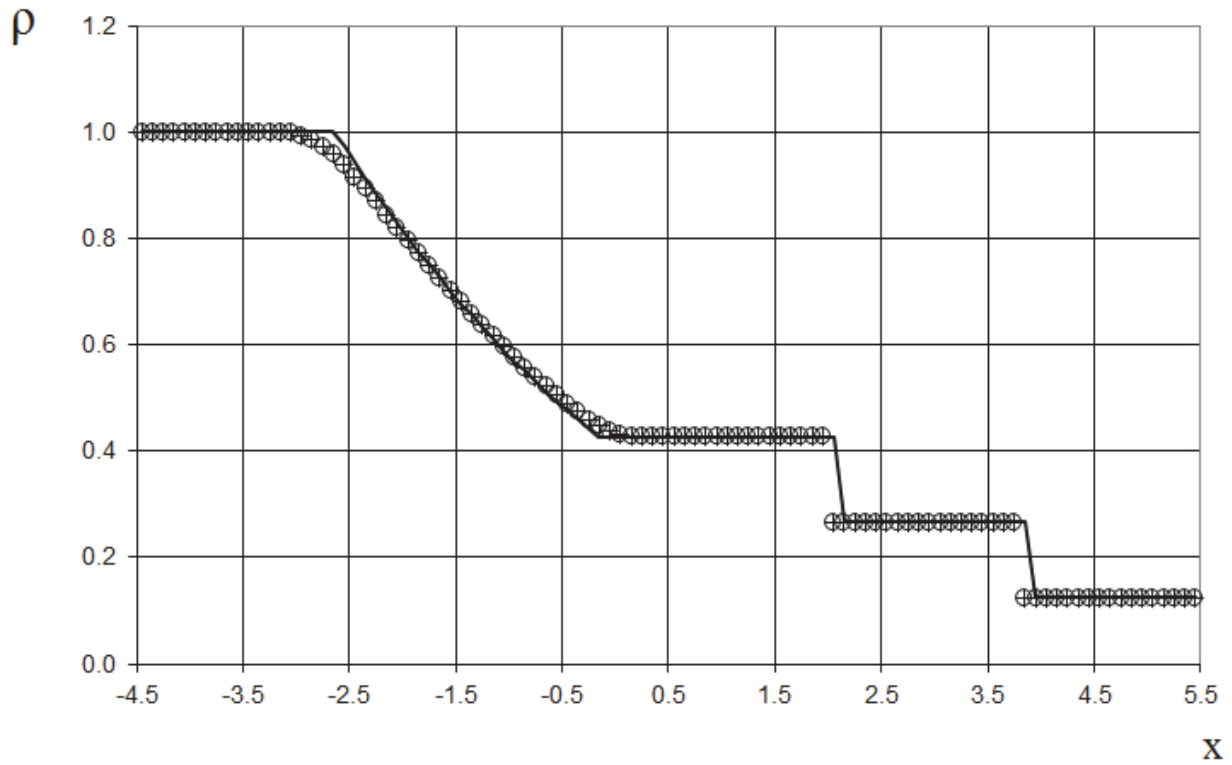


Рис. 5. Распределение плотности в задаче о распаде разрыва (61)

— - точное решение, + - решение предыдущей работы автора, o - предлагаемый метод

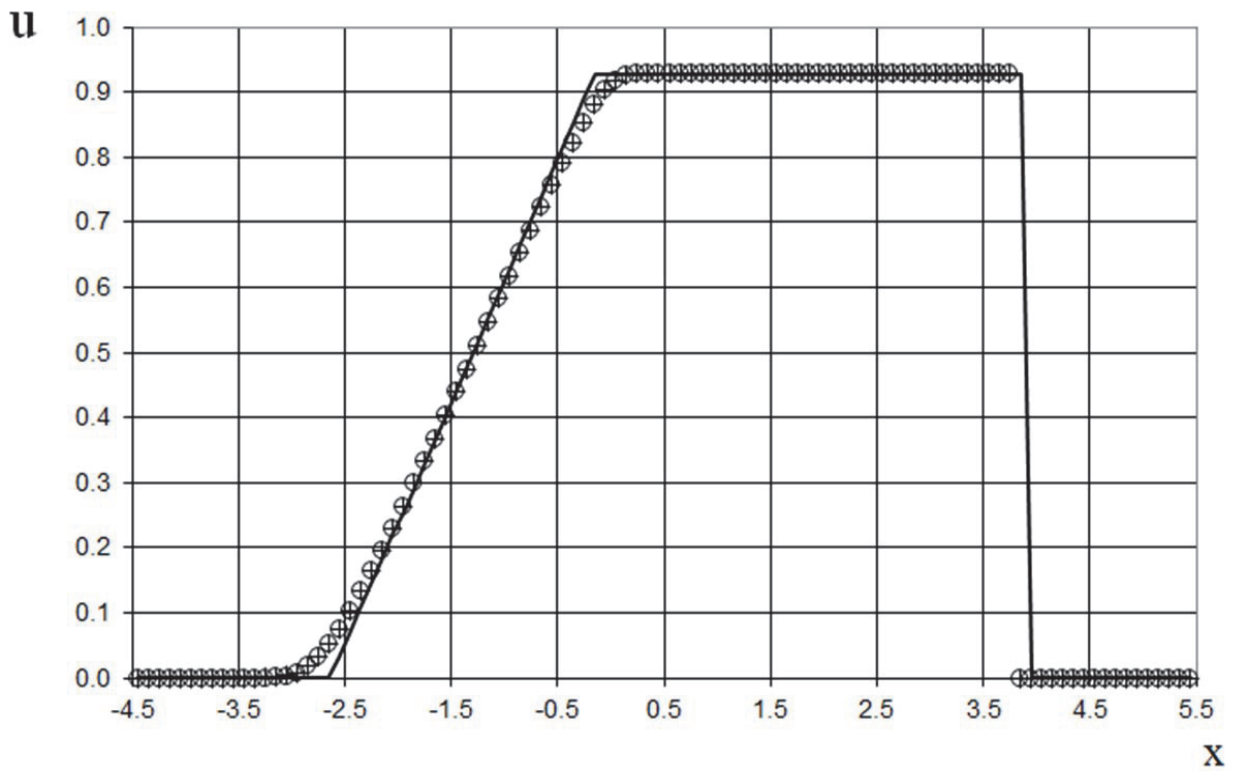


Рис. 6. Распределение скорости в задаче о распаде разрыва (61)

— - точное решение, + - решение предыдущей работы автора, o - предлагаемый метод

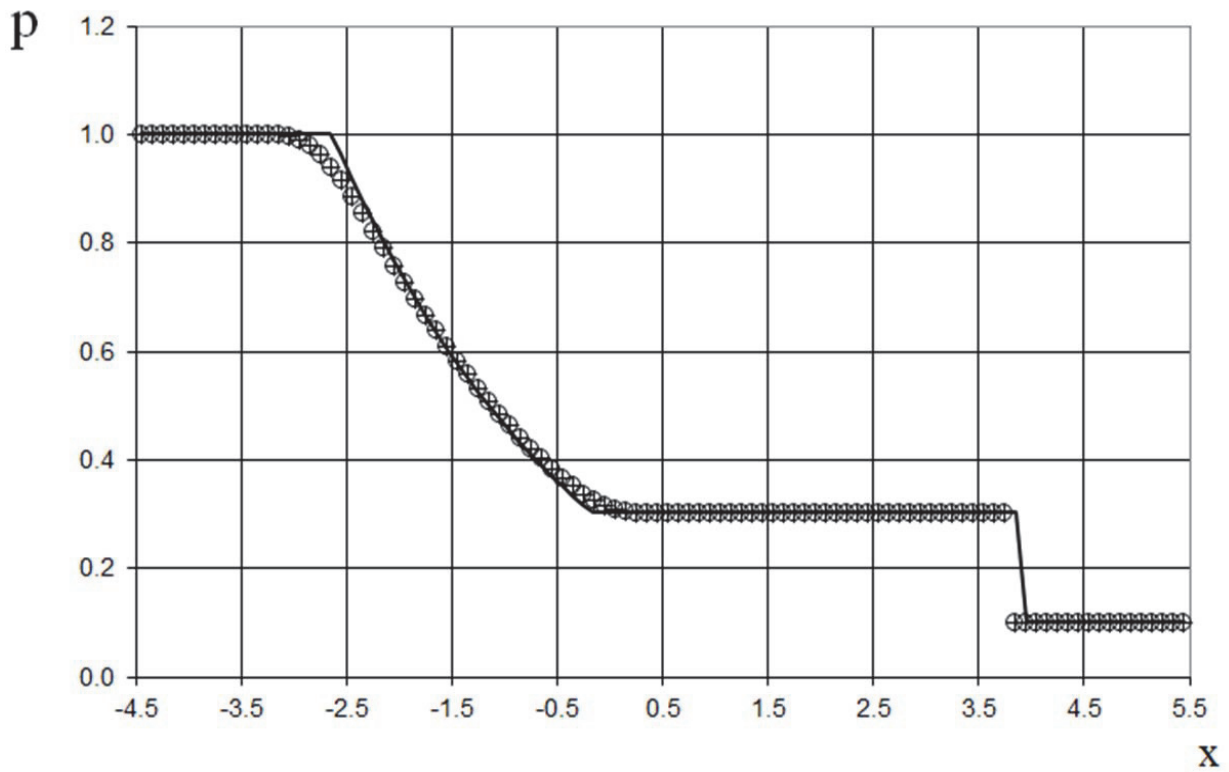


Рис. 7. Распределение давления в задаче о распаде разрыва (61)

— - точное решение, + - решение предыдущей работы автора, o - предлагаемый метод

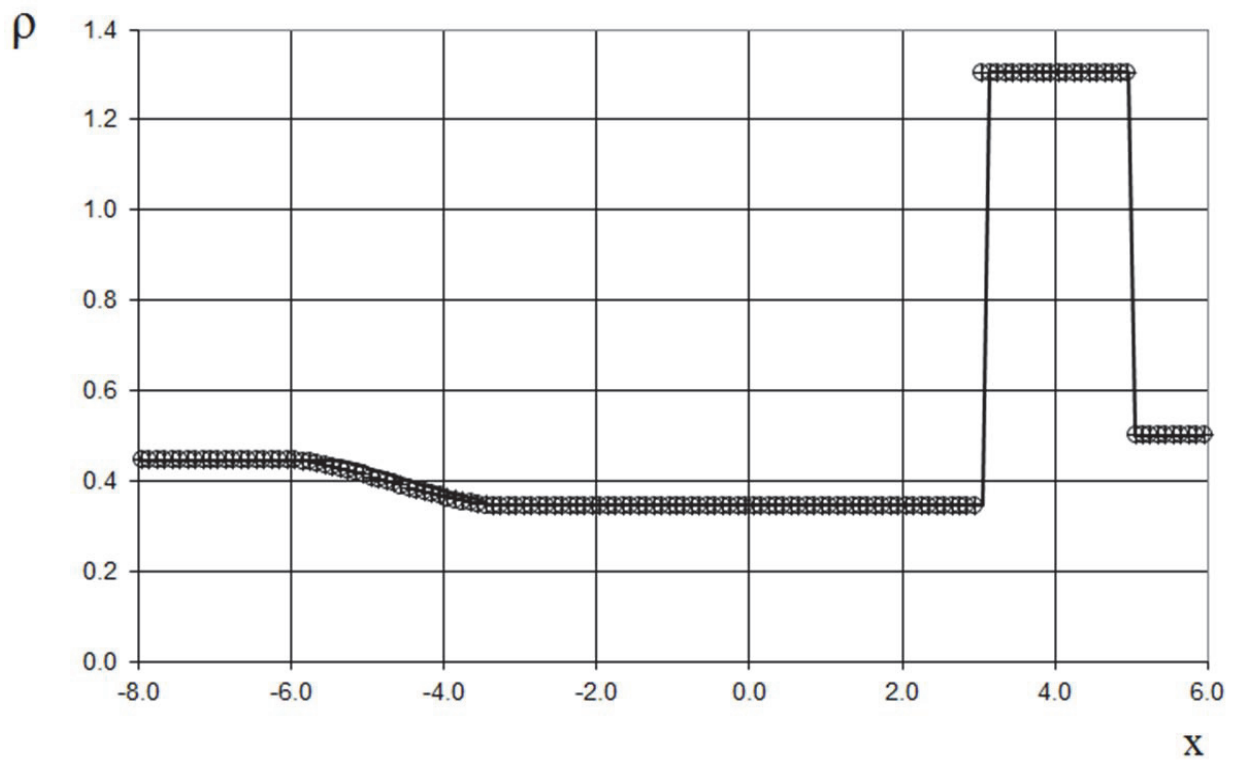


Рис. 8. Распределение плотности в задаче о распаде разрыва (62)

— - точное решение, + - решение предыдущей работы автора, o - предлагаемый метод

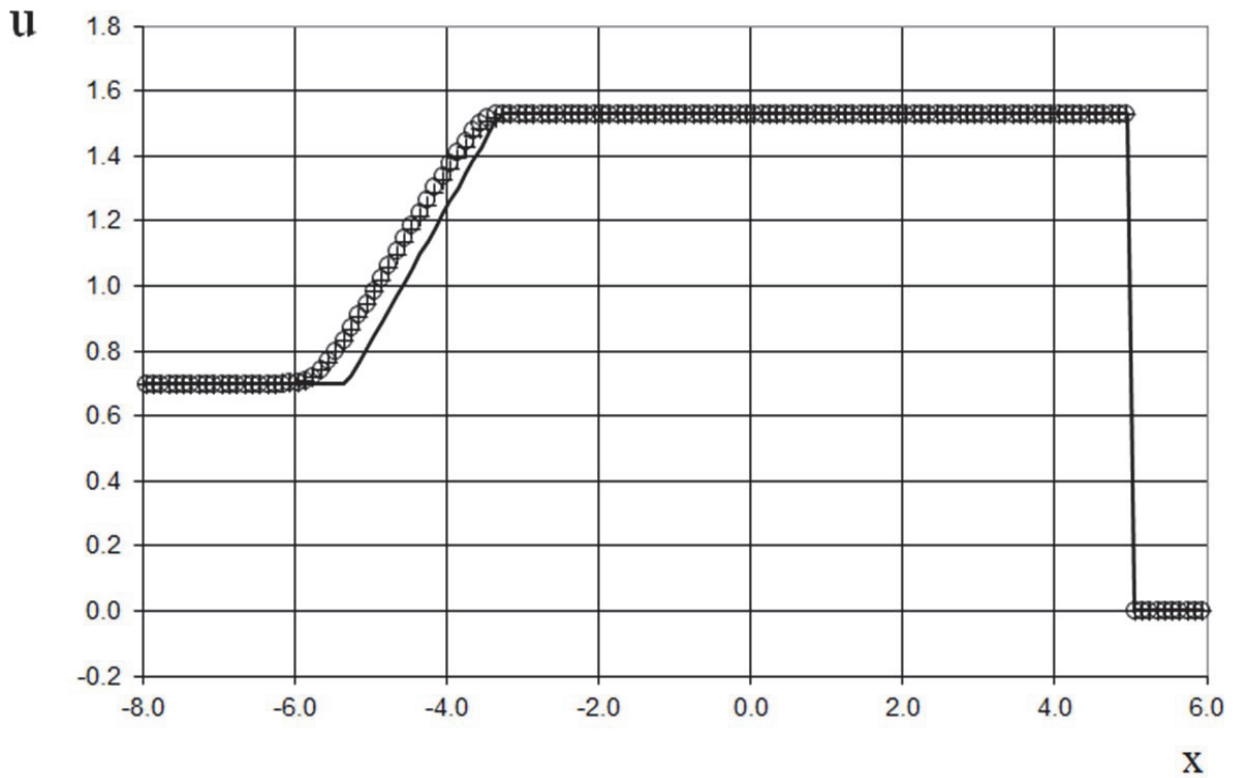


Рис. 9. Распределение скорости в задаче о распаде разрыва (62)

— - точное решение, + - решение предыдущей работы автора, o - предлагаемый метод

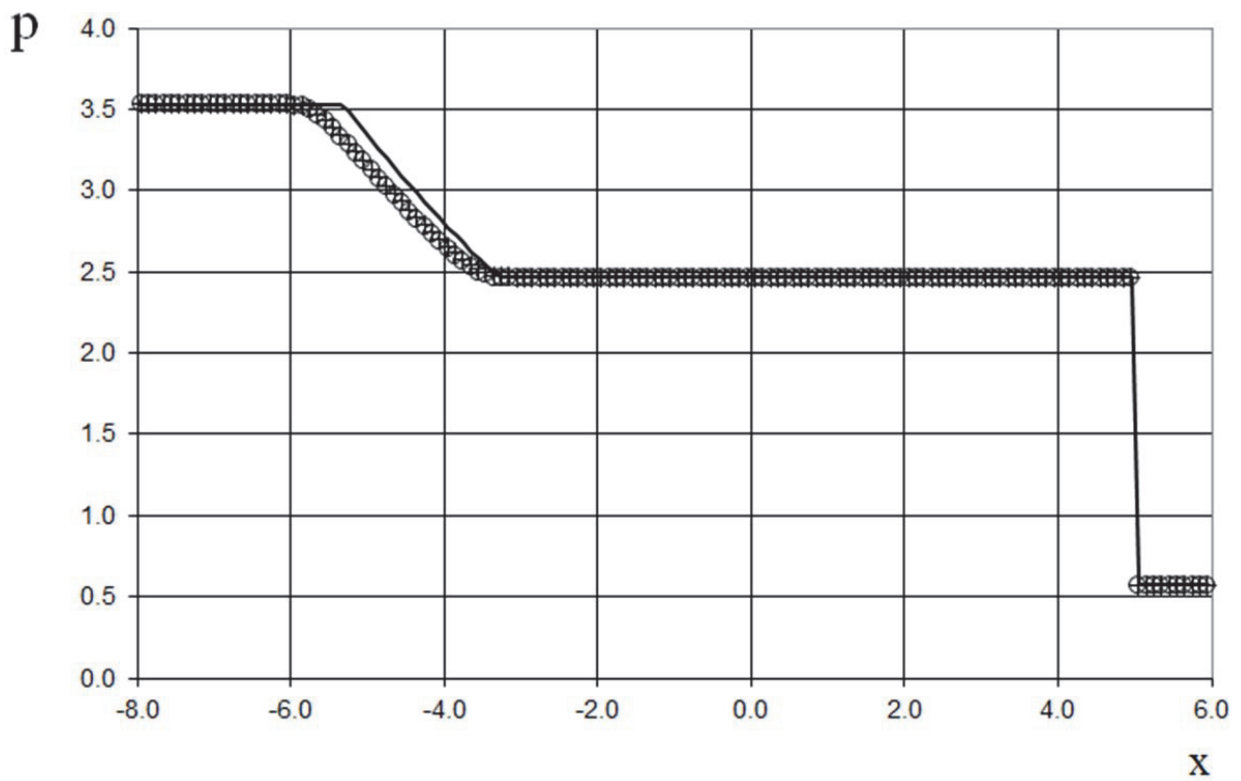


Рис. 10. Распределение давления в задаче о распаде разрыва (62)

— - точное решение, + - решение предыдущей работы автора, o - предлагаемый метод

рует ударный фронт, движущийся внутри одномерного невязкого потока с искусственными флуктуациями плотности. Начальными условиями для моделирования являются:

$$\rho_j^0 = 10.3333, u_j^0 = 2.629369, p_j^0 = 3.857143,$$

если $x_j < 1/8$,

$$\rho_j^0 = 1.0, u_j^0 = 0, p_j^0 = 1 + 0.2 \sin(16\pi x),$$

если $x_j \geq 1/8$. (63)

Область моделирования принималась равной $x \in [0, 1]$. Использовались три вида сеток: грубая сетка (192 узлов), мелкая сетка (384 узлов) и более мелкая сетка (1000 узлов). Шаг по времени на этапе акустики выбирался по критерию Куранта (15), где $k_c = 2$ - т.е. ударная волна распространяется через две ячейки сетки на этапе акустики (для всех сеток). Шаг по времени на этапе конвекции выбирался согласно (17), где $k_u = 5$ - т.е. ударная волна распространяется через пять ячеек сетки на этапе конвекции (для всех сеток). Маршевый шаг времени был $\Delta t = 0.010270978683$ для грубой сетки, $\Delta t = 0.005135489341$ - для мелкой сетки и $\Delta t = 0.001972027907$ - для более мелкой сетки. Стадии акустики и конвекции выполнялись на каждом шаге по времени, т.е. $\Delta t_c = \Delta t_u = \Delta t$.

Результаты показаны на рисунках 11–13 в сравнении с «точным» решением [21] в момент времени $t = 0.178$. Из данных, представленных на рисунках, видно, что результаты на мелкой и более мелкой сетках точнее, чем на грубой. Предложенный метод имеет большую точность, чем предыдущий [20], как мы видим на рисунке 12. Однако из-за накопления ошибки округления ударная волна задерживается на несколько ячеек сетки для грубой сетки в показанный момент времени (рисунок 11).

НУ четвертой тестовой задачи задавались следующим образом

$$\rho_j^0 = 101325.0, u_j^0 = 600.0, p_j^k = 1.25, \quad (64)$$

при этом в момент времени $t = 0$ в сечении $x = 0$ канала опускалась непроницаемая перегородка.

Область моделирования принималась равной $x \in [-5, 5]$, сетка содержала 100 ячеек, шаг сетки составлял $h = 0.1$. Шаг по времени для процесса «акустики» выбирался согласно критерию (15), где $k_c = 2$, т.е. ударная волна на этапе «акустики» перемещалась на 2 ячейки сетки. Шаг по времени для процесса конвекции выбирался по правилу (17), где $k_u = 5$, т.е. ударная волна на этапе конвекции перемещалась на 5 ячеек сетки. Маршевый шаг равнялся $\Delta t = 0.00079$. Этапы «акустики» и конвекции выполнялись на каж-

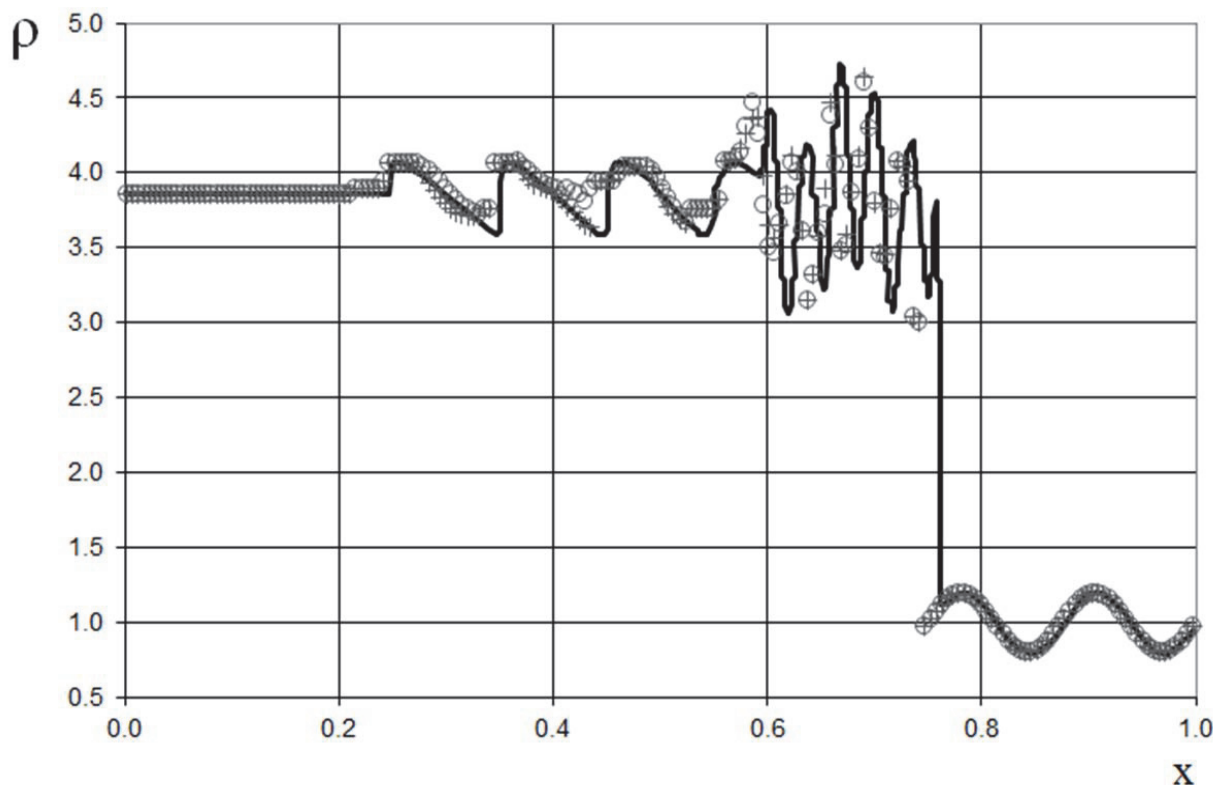


Рис. 11. Распределение плотности в задаче об ударной трубе Шу и Ошера (63) на грубой сетке (192 узла):

— - «точное» решение [21], + - решение предыдущей работы автора, o - предлагаемый метод

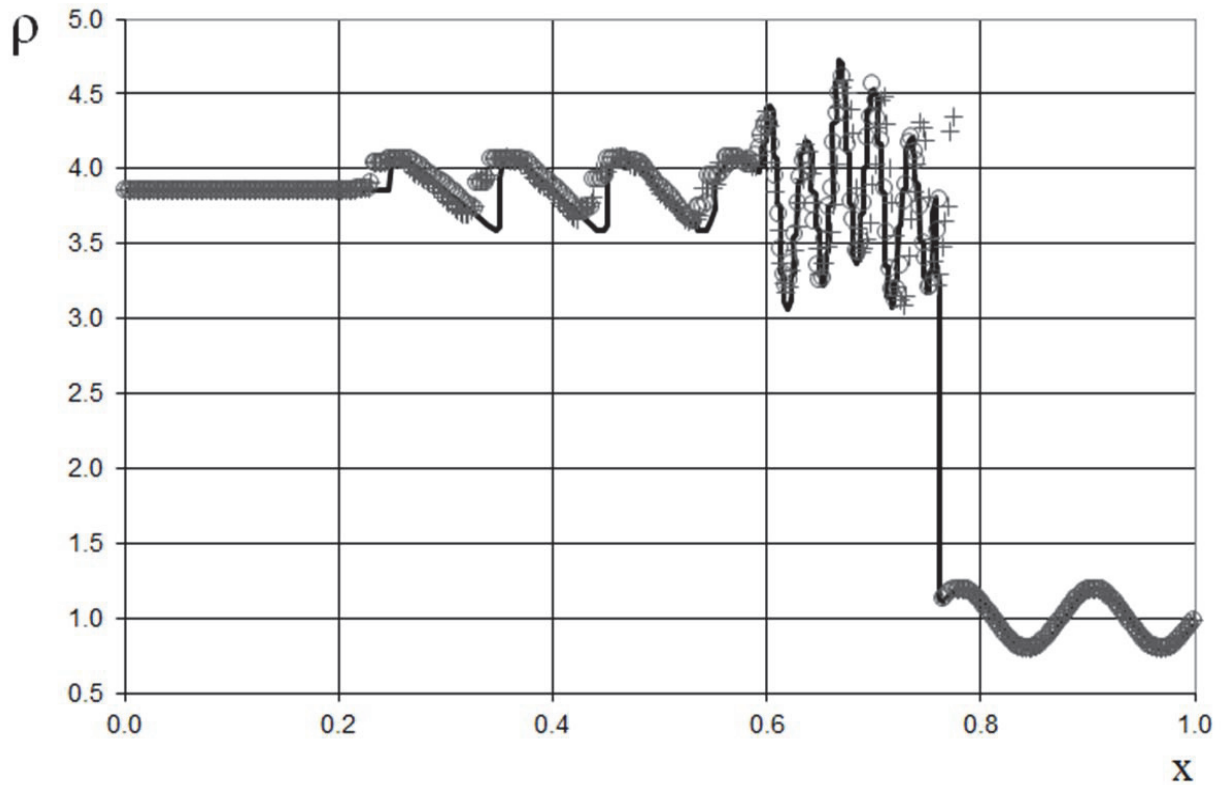


Рис. 12. Распределение плотности в задаче об ударной трубе Шу и Ошера (63) на мелкой сетке (384 узла):

— - «точное» решение [21], + - решение предыдущей работы автора, O - предлагаемый метод

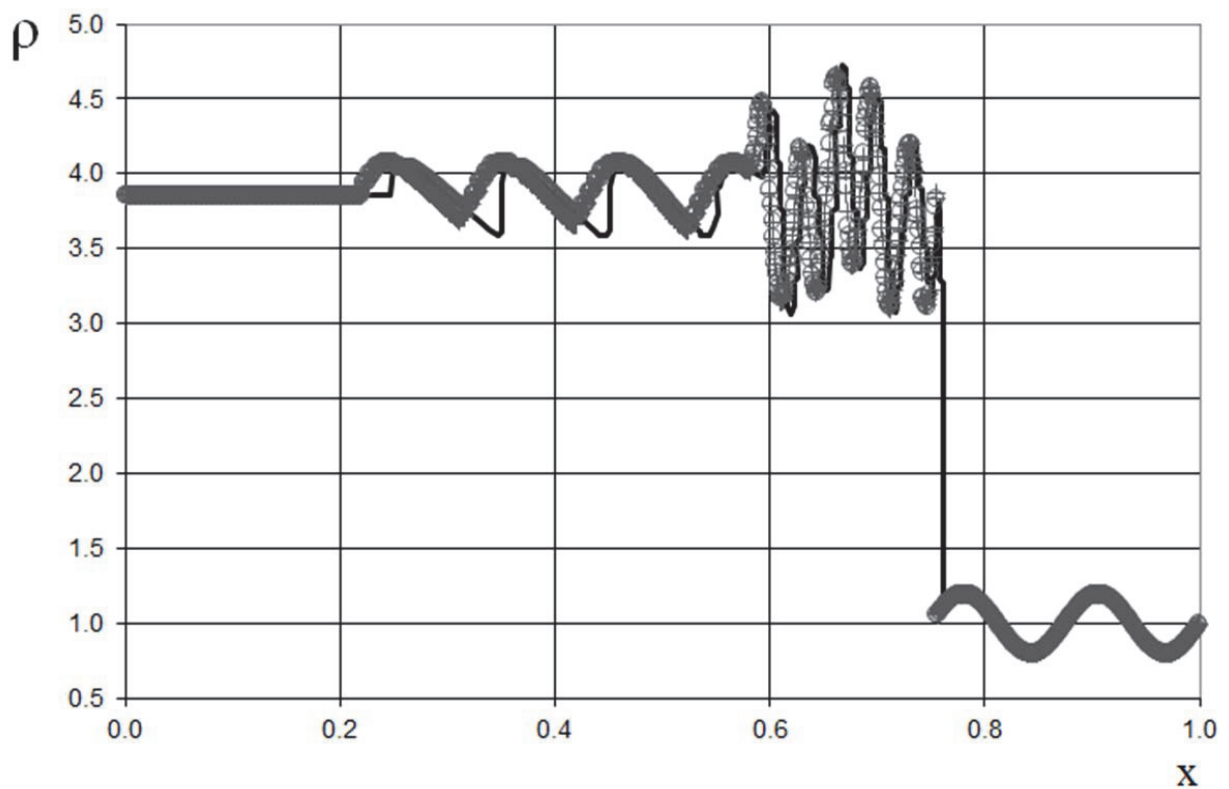


Рис. 13. Распределение плотности в задаче об ударной трубе Шу и Ошера (63) на более мелкой сетке (1000 узлов):

— - «точное» решение [21], + - решение предыдущей работы автора, O - предлагаемый метод

дом шаге по времени, т.е. $\Delta t_c = \Delta t_u = \Delta t$.

Результаты расчетов в момент времени $t = 0.00474$ показаны на рисунках 14-16 в сравнении с точным решением. Графики показывают совпадение результатов для предыдущего и модифицированного методов и отсутствие численной вязкости на ударных волнах, при этом также отсутствует запаздывание ударной волны.

6. ВЫВОДЫ

Результаты численного решения для вышеупомянутых известных тестовых случаев сравнивались с точными решениями и данными Хартена. На основании полученных результатов можно сделать следующие выводы:

1) Преимуществом предлагаемого метода по сравнению с известными методами TVD, ENO и WENO является отсутствие численной вязкости (диффузии) ударных волн.

2) По сравнению с методами МОС не пренебрегаются конвективными членами, что важно при моделировании течения газа.

3) Со временем ударные волны или волны разрежения могут распространяться несколько медленнее или быстрее, чем в точном решении. Это можно объяснить округлением положения волновых фронтов до точности ячейки сетки за счет использования фиксированной однородной сетки.

4) Предложенная модификация полулагранжевого численного метода позволяет получить более универсальный метод для рассмотренного класса задач с сохранением точности, а в случае задачи Шу и Ошера об ударной трубе даже с её повышением.

Точность предлагаемого метода определяется итерационным точным решателем Годунова для разрывов потока. В расчетах мы используем условие завершения итерации менее 10^{-5} для нахождения разницы давлений между текущей и предыдущей итерациями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *von Neumann, J., Richtmyer, R.D.* A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks // *J. Appl. Phys.* v. 21. 1950. P. 232.
2. *Jameson, A.* Analysis and design of numerical schemes for gas dynamics, 1: Artificial diffusion, upwind biasing, limiters and their effect on accuracy and multigrid convergence // *Int. J. Comput. Fluid Dyn.* v. 4. 1994. P. 171–218.
3. *Harten, A.* High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // *J. of Comp. Phys.* v. 49. 1983. P. 357–393.
4. *Harten, A., Engquist, B., Osher, S., Chakravarthy, S.R.* Uniform high order accurate essentially non-oscillatory schemes, III // *J. Comput. Phys.* v. 71. 1987. P. 231–303.
5. *Liu, X.D., Osher, S., Chan, T.* Weighted essentially non-oscillatory schemes. // *J. Comput. Phys.* v. 115. 1994. P. 200–212.
6. *Harten, A.* ENO schemes with subcell resolution // *J.*

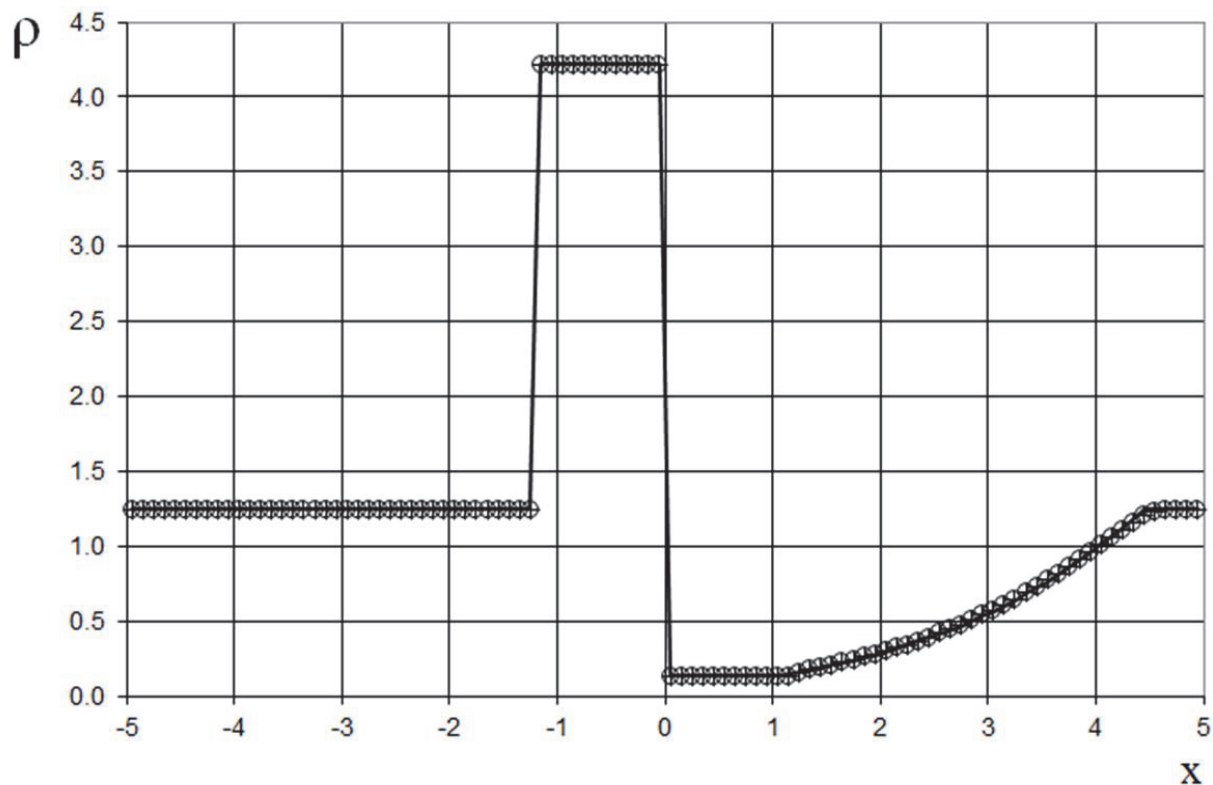


Рис. 14. Распределение плотности в задаче (64)

— - точное решение, + - решение предыдущей работы автора, O - предлагаемый метод

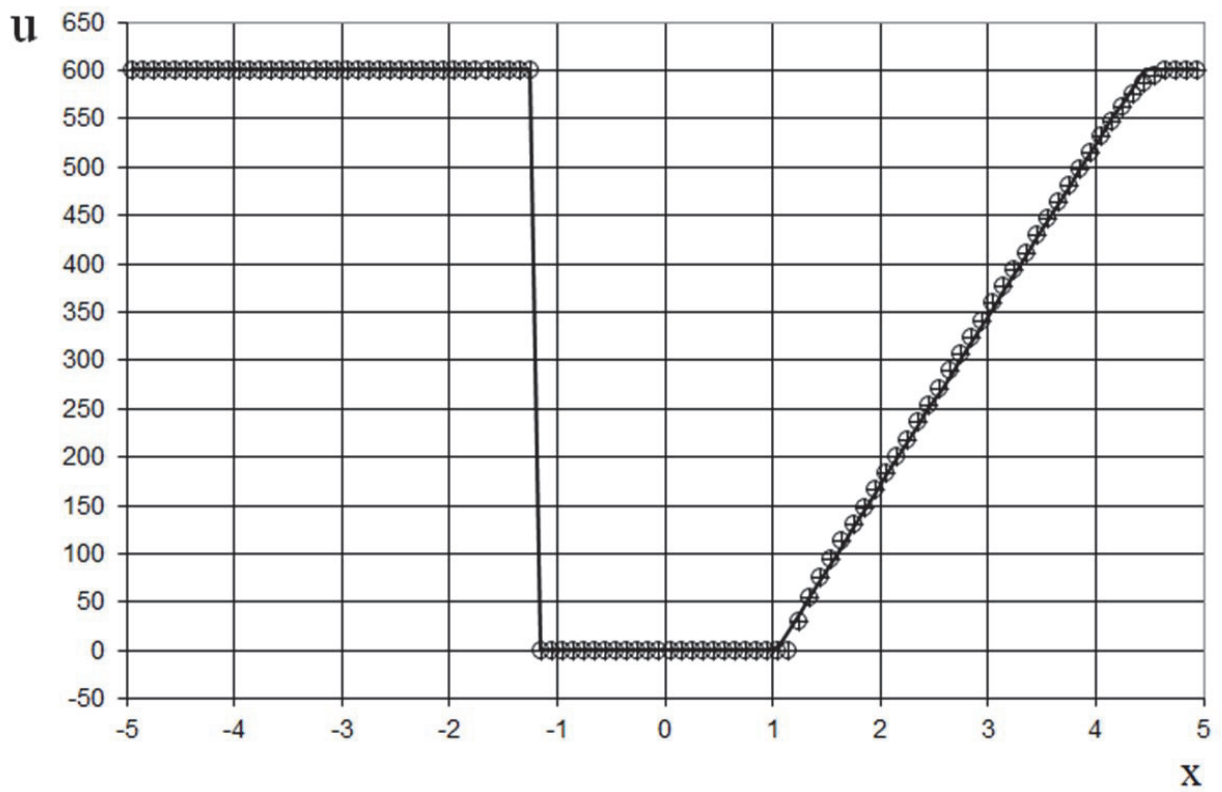


Рис. 15. Распределение скорости в задаче (64)

—— - точное решение, + - решение предыдущей работы автора, O - предлагаемый метод

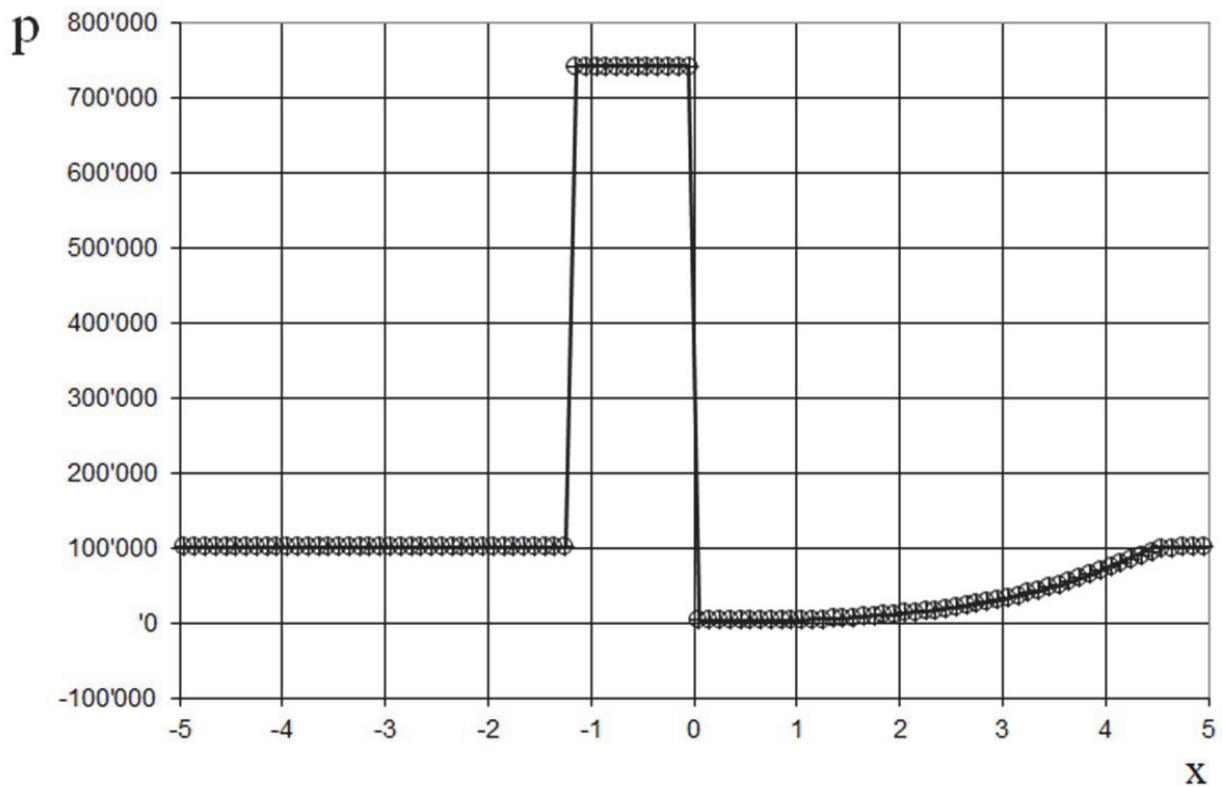


Рис. 16. Распределение давления в задаче (64)

—— - точное решение, + - решение предыдущей работы автора, O - предлагаемый метод

- Comput. Phys. v. 83. 1987, P. 148–184.
7. Harten, A., Osher, S. Uniformly high order essentially non-oscillatory schemes I // SIAM J. Numer. Anal. v. 24. 1987 P. 279–309.
 8. Harten, A., Osher, S., Engquist, B., Chakravarthy, S. Some results on uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes // Appl. Numer. Math. v. 2. 1986. P. 347–377.
 9. Shu, C.-W., Osher, S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes // J. Comput. Phys. v. 77. 1988. P. 439–471.
 10. Shu, C.-W., Osher, S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes II // J. Comput. Phys. v. 83. 1989. P. 52–78.
 11. Jiang, G.-S., Shu, C.-W. Efficient implementation of Weighted ENO schemes // J. Comput. Phys. v. 126. 1996. P. 202–228.
 12. Pawar, S., San, O. CFD Julia: A Learning Module Structuring an Introductory Course on Computational Fluid Dynamics // Fluids. v. 4. 2019. P. 159. <https://doi.org/10.3390/fluids4030159>.
 13. Roe, P.L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes // J. of Comp. Phys. v. 135. 1997. P. 250–258.
 14. Годунов, С.К. Численное решение многомерных задач газовой динамики / С.К. Годунов, А.В. Забродин, М.Я. Иванов, А.Н. Крайко, Г.П. Прокопов. – М.: Наука, 1976. – 400 с.
 15. Le Veque, R.J. Balancing source terms and flux gradients on high-resolution Godunov methods: The quasi-steady wave-propagation algorithm // J. Comput. Phys. v. 146. 1998. P. 346–365.
 16. Einfeldt, B. On Godunov-type methods for gas dynamics // SIAM J. Numer. Anal. v. 25. 1988. P. 294–318.
 17. Wu, Y.Y., Cheung, K.F. Explicit solution to the exact Riemann problem and application in nonlinear shallow-water equations // Int. J. Numer. Meth. Fluids. v. 57. 2008. P. 1649–1668. doi:10.1002/flid.1696.
 18. Saba Basiri, Seyyed Mohammad Ghoreishi, Jaber Safdari, Sadegh Yousefi-Nasab, Three-dimensional simulation of gas flow for predicting the pressure and velocity profiles inside a gas centrifuge machine using the DSMC method // Vacuum. v. 219. Part A. 2024. P. 112664, ISSN 0042-207X, <https://doi.org/10.1016/j.vacuum.2023.112664>.
 19. Никонов, В.В. Применение подхода Лагранжа к решению одномерной задачи распространения ударных волн в газе / В.В. Никонов, В.Г. Шахов // Известия Самарского научного центра РАН. – 2011. – Т. 13. – № 6. – С. 136–141.
 20. Nikonov, V.A Semi-Lagrangian Godunov-Type Method without Numerical Viscosity for Shocks // Fluids. v. 7. 2022. P. 16. <https://doi.org/10.3390/fluids7010016>
 21. Taylor, E.M., Wu, M., Martin, M.P. Optimization of Nonlinear Error for Weighted Essentially Non-Oscillatory Methods in Direct Numerical Simulations of Compressible Turbulence. // J. Comput. Phys. v. 223. 2007. P. 384–397.
 22. Sod, G.A. A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. v. 107. 1978. P. 1–31.
 23. Lax, P.D. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation // Commun. Pure Appl. Math. v. 7. 1954. P. 159–193.

MATHEMATICAL MODELING OF COMPRESSIBLE ONE-DIMENSIONAL FLOWS USING THE SEMI-LAGRANGIAN NUMERICAL GODUNOV METHOD WITHOUT COMPUTATIONAL VISCOSITY FOR SHOCK WAVES

© 2024 V.V. Nikonov

Samara National Research University named after Academician S.P. Korolyov, Samara, Russia

One of the most important and complex effects in compressible fluid flow simulation is a shock-capturing mechanism. Numerous high-resolution Euler-type methods have been proposed to resolve smooth flow scales accurately and to capture the discontinuities simultaneously. One of the disadvantages of these methods is a numerical viscosity for shocks. In the shock, the flow parameters change abruptly at a distance equal to the mean free path of a gas molecule, which is much smaller than the cell size of the computational grid. Due to the numerical viscosity, the aforementioned Euler-type methods stretch the parameter change in the shock over few grid cells. We introduce a semi-Lagrangian Godunov-type method without numerical viscosity for shocks. Another well-known approach is a method of characteristics that has no numerical viscosity and uses the Riemann invariants or solvers for water hammer phenomenon modeling, but in its formulation the convective terms are typically neglected. We use a similar approach to solve the one-dimensional adiabatic gas dynamics equations, but we split the equations into parts describing convection and acoustic processes separately, with corresponding different time steps. When we are looking for the solution to the one-dimensional problem of the scalar hyperbolic conservation law by the proposed method, we additionally use the iterative Godunov exact solver, because the Riemann invariants are non-conserved for moderate and strong shocks in an ideal gas. In the shock for the proposed method, the flow properties change instantaneously (with an accuracy dependent on the grid cell size). The proposed method belongs to a group of particle-in-cell (PIC) methods. To the best of the author's knowledge, there were no similar PIC numerical schemes utilizing the Riemann invariants or the iterative Godunov exact solver prior to 2011 (as described in the first author's publication detailing the numerical method). This article delineates the further advancement of the numerical scheme of the proposed method, specifically presenting a unified mathematical formulation for an expanded set of test problems as outlined in the author's second article from 2022. In the 2022 article, a linear law of distribution of flow parameters was employed for a rarefaction wave when modeling the Shu–Osher problem, aimed at reducing parasitic oscillations. Additionally, a nonlinear law derived from Riemann invariants was utilized for the remaining test problems. The obtained results of numerical analysis for these cases, including the standard shock-tube problem of Sod, the Riemann problem of Lax, and the Shu–Osher shock-tube problem, are compared with both the exact solution and the data presented in the 2022 paper. The iterative Godunov exact solver determines the accuracy of the proposed method for flow discontinuities. In calculations, we use the iteration termination condition less than 10^{-5} to find the pressure difference between the current and previous iterations.

Key words: gas, shock, Riemann problem, Godunov method, Lagrange approach, numerical viscosity.

DOI: 10.37313/1990-5378-2024-26-3-147-163

EDN: FYDXLA

REFERENCES

1. von Neumann, J., Richtmyer, R.D. A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks // J. Appl. Phys. v. 21. 1950. P. 232.
2. Jameson, A. Analysis and design of numerical schemes for gas dynamics, 1: Artificial diffusion, upwind biasing, limiters and their effect on accuracy and multigrid convergence // Int. J. Comput. Fluid Dyn. v. 4. 1994. P. 171–218.
3. Harten, A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. of Comp. Phys. v. 49. 1983. P. 357–393.
4. Harten, A., Engquist, B., Osher, S., Chakravarthy, S.R. Uniform high order accurate essentially non-oscillatory schemes, III // J. Comput. Phys. v. 71. 1987. P. 231–303.
5. Liu, X.D., Osher, S., Chan, T. Weighted essentially non-oscillatory schemes. // J. Comput. Phys. v. 115. 1994. P. 200–212.
6. Harten, A. ENO schemes with subcell resolution // J. Comput. Phys. v. 83. 1987, P. 148–184.
7. Harten, A., Osher, S. Uniformly high order essentially non-oscillatory schemes I // SIAM J. Numer. Anal. v. 24. 1987 P. 279–309.
8. Harten, A., Osher, S., Engquist, B., Chakravarthy, S. Some results on uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes // Appl. Numer. Math. v. 2. 1986. P. 347–377.
9. Shu, C.-W., Osher, S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes // J. Comput. Phys. v. 77. 1988. P. 439–471.
10. Shu, C.-W., Osher, S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes II // J. Comput. Phys. v. 83. 1989. P. 32–78.
11. Jiang, G.-S., Shu, C.-W. Efficient implementation of Weighted ENO schemes // J. Comput. Phys. v. 126. 1996. P. 202–228.
12. Pawar, S., San, O. CFD Julia: A Learning Module Structuring an Introductory Course on Computational Fluid Dynamics // Fluids. v. 4. 2019. P. 159. <https://doi.org/10.3390/fluids4030159>.
13. Roe, P.L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes // J. of Comp. Phys. v. 135. 1997. P. 250–258.
14. Godunov, S.K. CHislennoe reshenie mnogomernyh zadach gazovoj dinamiki / S.K. Godunov, A.V. Zabrodin, M.YA. Ivanov, A.N. Krajko, G.P. Prokopov. – M.: Nauka, 1976. – 400 s.
15. Le Veque, R.J. Balancing source terms and flux gradients on high-resolution Godunov methods: The quasi-steady wave-propagation algorithm // J. Comput. Phys. v. 146. 1998. P. 346–365.
16. Einfeldt, B. On Godunov-type methods for gas dynamics // SIAM J. Numer. Anal. v. 25. 1988. P. 294–318.
17. Wu, Y.Y., Cheung, K.F. Explicit solution to the exact Riemann problem and application in nonlinear shallow-water equations // Int. J. Numer. Meth. Fluids. v. 57. 2008. P. 1649–1668. doi:10.1002/flid.1696.
18. Saba Basiri, Seyyed Mohammad Ghoreishi, Jaber Safdari, Sadegh Yousefi-Nasab, Three-dimensional simulation of gas flow for predicting the pressure and velocity profiles inside a gas centrifuge machine using the DSMC method // Vacuum. v. 219. Part A. 2024. P. 112664, ISSN 0042-207X, <https://doi.org/10.1016/j.vacuum.2023.112664>.
19. Nikonov, V.V. Primenenie podhoda Lagranzha k resheniyu odnomernej zadachi rasprostraneniya udarnyh voln v gaze / V.V. Nikonov, V.G. Shahov // Izvestiya Samarskogo nauchnogo centra RAN. – 2011. – T. 13. – № 6. – S. 136–141.
20. Nikonov, V. A Semi-Lagrangian Godunov-Type Method without Numerical Viscosity for Shocks // Fluids. v. 7. 2022. P. 16. <https://doi.org/10.3390/fluids7010016>
21. Taylor, E.M., Wu, M., Martin, M.P. Optimization of Nonlinear Error for Weighted Essentially Non-Oscillatory Methods in Direct Numerical Simulations of Compressible Turbulence. // J. Comput. Phys. v. 223. 2007. P. 384–397.
22. Sod, G.A. A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. v. 107. 1978. P. 1–31.
23. Lax, P.D. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation // Commun. Pure Appl. Math. v. 7. 1954. P. 159–193.