

УДК539.214 : 539.374: 621.9.011

К ЗАДАЧЕ О КОМБИНИРОВАННОМ НАГРУЖЕНИИ ПОЛОСЫ

© 2024 В.А. Кадымов¹, Е.Н. Сосенушкин², Е.А. Яновская², С.А. Рогулин²

¹Российский технологический университет «МИРЭА», г. Москва, Россия

²Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», г. Москва, Россия

Статья поступила в редакцию 22.05.2024

В статье приводится постановка и решение плоской задачи о растяжении пластической полосы, концы которой зажаты между двумя параллельными шероховатыми плоскостями, дополненная несимметричностью условий на растекающихся приторцовых зонах. Найдена верхняя оценка общей силы сжатия захватами концевых областей пластически растягиваемой полосы, при достижении которой одновременно с пластическим растяжением полосы происходит пластическая осадка приторцовых ее частей. Показано, что при дальнейшем деформировании происходит утонение и разрыв не в средней ее растягиваемой части, а вблизи внутренней границы контакта вблизи захвата.

Ключевые слова: плоская задача, растяжение и сжатие участков пластической полосы.

DOI: 10.37313/1990-5378-2024-26-3-140-146

EDN: HMFNWO

Классическая задача о сжатии пластической полосы между сближающимися шероховатыми плоскостями твердых тел инструмента [1] продолжает привлекать внимание многих исследователей [2-5]. С ее помощью объяснены присутствующие описываемым физическим процессам некоторые качественные особенности: явление проскальзывания вдоль поверхности контакта с захватом [6]; заметное доминирование шаровой части тензора напряжений над девиаторными составляющими в пластической полосе [7-9]; соизмеримость нормальных упругих перемещений контактирующих тел с толщиной полосы [10]; эффект «холодной сварки» [11] и пр. С другой стороны, задача помогает лучше понять механизм контактного взаимодействия твердых и пластически деформируемых тел. Л. Прандтлем построено предельное поле напряжений [1], которое Надаи [12] дополнил соответствующими скоростями течения. На основе анализа решения Прандтля – Надаи была предложена приближенная математическая модель для описания процесса течения пластических слоев между двумя сближающимися физическими поверхностями инструмента [10, 11].

Задача 1. Рассмотрим задачу сжатия пластической полосы в условиях плоской деформации в области:

Кадымов Вагид Ахметович, доктор физико-математических наук, профессор.

Сосенушкин Евгений Николаевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой композиционных материалов.

E-mail: sen@stankin.ru

Яновская Елена Александровна, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики.

E-mail: elena_yanovskaya@bk.ru

Рогулин Сергей Александрович, преподаватель.

$S = \{(x, y) | -h < y < h; -l_1 < x < l_2\}$
с несимметричными условиями на концах (рис. 1).

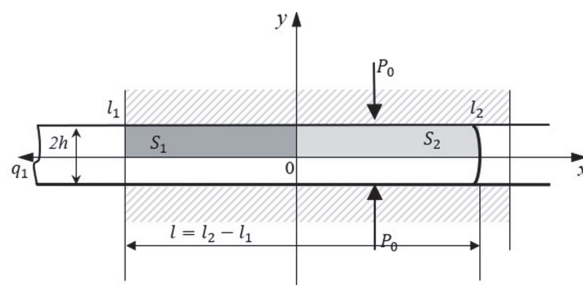


Рис. 1. К задаче о свободном растекании пластического слоя между плоскими захватами: q_1 – распределенная растягивающая нагрузка; h – половина толщины полосы; $(-l_1, h)$; (l_2, h) – координаты крайних точек захвата

Постановка задачи в этом случае имеет вид системы, содержащей:

уравнения квазистатического равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

условие пластичности:

$$(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2 = 4\tau_s^2, \quad (2)$$

уравнения состояния:

$$\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} = \frac{2\sigma_s}{3v_n} v_{ij}; \quad (3)$$

$$v_{xx} + v_{yy} = 0. \quad (4)$$

где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$, v_n – интенсивность скорости деформации, σ – среднее напряжение.

Запишем уравнение (3) в развернутом виде:

$$\sigma_{xx} - \sigma = \frac{2\sigma_s}{3v_n} v_{xx}; \quad (5)$$

$$\sigma_{yy} - \sigma = \frac{2\sigma_s}{3v_n} v_{yy}; \quad (6)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{2\sigma_s}{3v_n} v_{xy}. \quad (7)$$

Найдем разность уравнений (5) и (6):

$$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = \frac{2\sigma_s}{3v_n} (v_{xx} - v_{yy}). \quad (8)$$

Разделим уравнение (8) на (7):

$$\frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})}{\sigma_{xy}} = \frac{v_{xx} - v_{yy}}{v_{xy}} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)}, \quad (9)$$

Выпишем условие несжимаемости:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (10)$$

Воспользуемся граничными условиями:

$$y = 0: v = 0, \sigma_{xy} = 0; \quad (11)$$

$$y = h: v = -v_0 = \frac{dh}{dt}, \sigma_{xy} = -\tau_s \text{sign}(\vec{v} \cdot \vec{k}_1), \quad (12)$$

где \vec{k}_1 – положительное направление оси Ox . Из условия (3) следует, что на контактной границе

$y = h$ существует неизвестная точка $x = x_p$, при переходе через которую напряжение σ_{xy} меняет знак, другими словами, точка $x = x_p$ попадает на линию ветвления течения. Потому интегрирование системы (1) будем проводить отдельно для областей:

$$S_1 = \{x | x_p < x < l\}, S_2 = \{x | -l < x < x_p\}, \\ S = S_1 \cup S_2.$$

Неизвестная точка $x = x_p$ определяется из дополнительного условия непрерывности нормального напряжения σ_{yy} .

В предположении, что искомые компоненты скорости v и v_{xy} есть функции, зависящие только от координаты y :

$$v = v(y); v_{xy} = v_{xy}(y) \quad (13)$$

получаем из уравнения несжимаемости (4)

$$u(x, y) = -\frac{\partial v(y)}{\partial y} \cdot x + f_1(y), \quad (14)$$

где $f_1(y)$ – постоянная интегрирования.

Подставляя (14) во второе уравнение (13), получим:

$$v_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v(y)}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2 v(y)}{\partial y^2} \cdot x + f_1'(y) \right)$$

В последнем уравнении члены, зависящие от координаты y :

$$\frac{\partial v(y)}{\partial x} = 0; \frac{\partial^2 v(y)}{\partial y^2} = 0$$

и решение отыщется в виде:

$$v = c_1 y + c_2, \quad (15)$$

где c_1 и c_2 – постоянные интегрирования, которые определяются из граничных условий:

при $v|_{y=0} = 0$ из уравнения (15): $0 \cdot c_1 + c_2 = 0$

находим $c_2 = 0$; при $v|_{y=h} = -v_0$ из уравнения

(15): $h \cdot c_1 + c_2 = -v_0$ находим

$$c_1 = -\frac{v_0}{h}. \quad (16)$$

Учитывая, что соотношение (14) получили из условия несжимаемости (4), которое необходимо интегрировать в каждой из областей S_1 и S_2 . Поэтому скорости перемещений и скорости деформаций будут найдены:

$$v = -\frac{v_0}{h} y; \\ u = \begin{cases} -c_1 x + f_1(y), & x \in S_1 \\ -c_1 x + f_1^*(y), & x \in S_2 \end{cases}; \\ v_{xy} = \begin{cases} \frac{f_1'(y)}{2}, & x \in S_1 \\ \frac{f_1^{*'}(y)}{2}, & x \in S_2 \end{cases} \quad (17)$$

Интенсивность скоростей деформаций имеет вид:

$$v_u = \sqrt{\frac{2}{3} v_{ij} v_{ij}} = \sqrt{\frac{2}{3} (v_{xx}^2 + 2v_{xy}^2 + v_{yy}^2)} = \\ = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{3} \left(c_1^2 + \frac{2(f_1')^2}{4} + c_1^2 \right)} = \\ \sqrt{\frac{2}{3} \left(c_1^2 + \frac{2(f_1^{*'})^2}{4} + c_1^2 \right)} = \\ \begin{cases} \frac{\sqrt{4c_1^2 + (f_1')^2}}{\sqrt{3}}, & x_p < x < l \\ \frac{\sqrt{4c_1^2 + (f_1^{*'})^2}}{\sqrt{3}}, & -l < x < x_p \end{cases} \end{cases} \quad (18)$$

Интегрирование двух уравнений равновесия (1) с учетом, что касательное напряжение σ_{xy} не зависит от координаты x , дает

$$\sigma_{yy} = -f(x); \\ \sigma_{xx} = 2 \sqrt{\tau_s^2 - \sigma_{xy}^2(y)} + \sigma_{yy}(x). \quad (19)$$

В последнем соотношении перед квадратным корнем сохранен знак «плюс», так как $\sigma_{yy} < 0$, а $|\sigma_{yy}| > |\sigma_{xx}|$ по физическому смыслу задачи. Далее интегрируя первое уравнение равновесия системы (1) с учетом (19), имеем

$$\sigma_{xy} = f'(x) \cdot y + c_3. \quad (20)$$

Из вторых соотношений (11) и (12) заключаем, что в волокне слоя, совпадающим с осью x и на

контактной границе с учетом (20):

при $y = 0$: $f'(x) \cdot 0 + c_3 = 0$ находим постоянную интегрирования $c_3 = 0$;

при $y = h$: $f'(x) \cdot h + c_3 = -\tau_s$ находим функцию $f'(x) = -\frac{\tau_s}{h}$;

Полученный результат подставим в уравнение (20):

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{\tau_s}{h}, & x_p < x < l_2 \\ +\frac{\tau_s}{h}, & l_1 < x < x_p \end{cases}. \quad (21)$$

Интегрируя (21), получим

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\tau_s}{h} \cdot x + c_4, & x_p < x < l_2 \\ \frac{\tau_s}{h} \cdot x + c_4^*, & l_1 < x < x_p \end{cases};$$

$$\sigma_{xy}(y) = \begin{cases} -\frac{\tau_s}{h} \cdot y, & x_p < x < l_2 \\ \frac{\tau_s}{h} \cdot y, & l_1 < x < x_p \end{cases}. \quad (22)$$

Из сравнения значений σ_{xy} по формулам (2), (3), (21) видно, что для верхней части полосы при ($y > 0$) $f_1^{*'}(y) > 0, f_1'(y) < 0$, поэтому интегрируя (21),

$$f_1^{*'}(y) = \frac{2 \left(-\frac{v_0}{h}\right) \left(-\frac{\tau_s}{h}\right) \cdot y}{\sqrt{\tau_s^2 - \left(\frac{\tau_s}{h}\right)^2 \cdot y^2}} = \frac{2v_0\tau_s y}{h^2 \tau_s \sqrt{h^2 - y^2}} = \frac{2v_0 y}{h \sqrt{h^2 - y^2}}. \quad (23)$$

После интегрирования

$$f_1^*(y) = -\frac{2v_0}{h} \sqrt{h^2 - y^2} + c_5^*, \quad (24)$$

$$f_1(y) = \frac{2v_0}{h} \sqrt{h^2 - y^2} + c_5. \quad (25)$$

Из (19) и (21) имеем

$$\sigma_{xx} = \begin{cases} \frac{\tau_s}{h} \cdot x - c_4 + 2 \frac{\tau_s}{h} \sqrt{h^2 - y^2} \\ -\frac{\tau_s}{h} \cdot x - c_4^* + \frac{\tau_s}{h} \sqrt{h^2 - y^2} \end{cases}; \quad (26)$$

$$p = -\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(-\frac{\tau_s}{h} \cdot x + c_4\right) - \sqrt{\tau_s^2 - a^2 y^2}, & x_p < x < l_2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\tau_s}{h} \cdot x + c_4^*\right) + \sqrt{\tau_s^2 - a^2 y^2}, & l_1 < x < x_p \end{cases}. \quad (27)$$

Выпишем интегральные условия для определения постоянных c_4, c_4^*, c_5, c_5^* .

$$-q_1 h = \int_0^h \sigma_{xx} \Big|_{x=l_1} dy; \quad 0 = \int_0^h \sigma_{xx} \Big|_{x=l_2} dy. \quad (28)$$

$$v_0(l_2 - x_p) = \int_0^h u \Big|_{x=l_2} dy =$$

$$= \int_0^h \left(\frac{v_0}{h} l_2 + 2 \frac{v_0}{h} [\sqrt{h^2 - y^2} - \tau_s] + c_5 \right) dy, \quad (29)$$

$$v_0(l_1 + x_p) = \int_0^h u \Big|_{x=l_1} dy =$$

$$= - \int_0^h \left(-\frac{v_0}{h} l_1 - 2 \frac{v_0}{h} [\sqrt{h^2 - y^2} - \tau_s] + c_5^* \right) dy. \quad (30)$$

Условию растяжения на торце полосы отвечает $q_1 < 0$ ($|q_1| < \sigma_s$). Из (26) получаем

$$c_4^* = \frac{1}{h} \left[q_1 h + \tau_s l + 2 \frac{\tau_s}{h} \int_0^h \sqrt{h^2 - y^2} dy \right], \quad (31)$$

$$c_4 = \frac{1}{h} \left[\tau_s l + 2 \frac{\tau_s}{h} \int_0^h \sqrt{h^2 - y^2} dy \right] \quad (32)$$

Из условия непрерывности σ_{yy} при $x = x_p$ следует

$$x_p = \frac{h(c_4 - c_4^*)}{2\tau_s} = -\frac{q_1 h}{2\tau_s} \leq \frac{h\sigma_s}{2\tau_s} = \frac{\sqrt{3}}{2} h. \quad (33)$$

Из (33) следует, что в случае свободно растекающейся полосы с симметричными условиями на концах ($q_1 = 0$) имеем $x_p = 0$.

$$c_5 = \frac{1}{h} \left\{ -v_0 x_p - 2 \frac{v_0}{h} \int_0^h \sqrt{h^2 - y^2} dy \right\},$$

$$c_5^* = -c_5 - \frac{2v_0 x_p}{h}. \quad (34)$$

Отметим, что, если сближающиеся инструменты (захваты) перемещаются вдоль оси Ox со скоростью $u_o(t)$, то условия (34) для определения c_5, c_5^* видоизменяются

$$v_0(l_2 - x_p) = \int_0^h (u \Big|_{x=l_2} - u_o) dy, \quad (35)$$

$$v_0(l_1 + x_p) = \int_0^h (u \Big|_{x=l_1} + u_o) dy. \quad (36)$$

Задача 2. Рассмотрим приведенное решение в совокупности с пластическим растяжением пластины. Подобный процесс существенно зависит от общей силы P_0 сжатия краевых участков пластины захватами. При значениях P_0 , превышающих некоторое критическое значение P^{cr} , жесткий захват пластины не обеспечивается ввиду того, что в зонах сжатия краевых участков пластины, еще до того, как начнется процесс растяжения, металл будет вытекать из-под захватов. При дальнейшем деформировании происходит утонение и разрыв пластины вблизи внутренней границы контакта с захватом. Пусть $l_1(t) < |X| < l_2(t) -$

область контакта с захватом, а $0 < |X| < l_1(t)$ – область пластического растяжения (рис. 2).

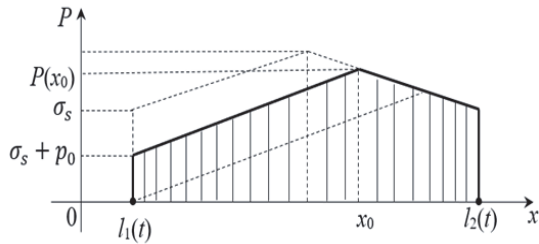


Рис. 2. Распределение контактного давления в области захвата

В области контакта полосы с захватом решение сохраняется, но нужно сделать преобразования

$$X(x) = x + \frac{l_1 + l_2}{2}, l_2 - l_1 = 2l, l_1 \leq X \leq l_2 \quad (37)$$

и принять условие (35) вместо (30), тогда получим

$$c_5 = \frac{1}{h} \left\{ -v_0 x_p - 2 \frac{v_0}{h} \int_0^h \sqrt{h^2 - y^2} dy + u_0(t) h \right\}. \quad (38)$$

Выпишем в новых переменных, согласно (37), выражение для σ_{yy}

$$\sigma_{yy} = \begin{cases} -\frac{\tau_s}{h} \left[X(x) - \frac{l_1 + l_2}{2} \right] - c_4; & X_p(x) < X(x) < l_2 \\ \frac{\tau_s}{h} \left[X(x) - \frac{l_1 + l_2}{2} \right] - c_4^*; & l_1 < X(x) < X_p(x) \end{cases}. \quad (39)$$

Положим, что полоса тонкая: $|l_2 - l_1| \gg h$. Найдем величину критической силы P^{cr} . Суммарная сила пластического сжатия торцов с учетом (37) будет

$$P^{cr} = -\frac{\tau_s}{h} (l^2 - x_p^2) - c_4^* (x_p + l) - c_4 (l - x_p), \quad (40)$$

где c_4, c_4^*, x_p определены формулами (31), (32) и (33).

Можно показать (см. рис.2), что P^{cr} полученное согласно (40), меньше соответствующего P_0 , необходимого для "чистого" сжатия той же части полосы со свободными концами. Найдем общую растягивающую силу

$$F_p = \int_{l_1}^{l_2} \sigma_{xy}(x) dx = 2\tau_s x_p. \quad (41)$$

Задачу решаем в области $|X| < l_1(t)$ в предположениях, что компоненты скорости зависят только от одной координаты $u = u(x), v = v(y)$, тогда получим

$$u = -\bar{c}_1 x; v = \bar{c}_1 y,$$

$$v_{xx} = -v_{yy} = -\bar{c}_1; v_{xy} = 0, \quad (42)$$

$$v_u = -\frac{2\bar{c}_1}{\sqrt{3}}; \bar{c}_1 = \frac{dh}{h dt}$$

где $h(t)$ – толщина части полосы, подверженной растяжению. Согласно (27), поле скоростей деформаций однородно.

Для силы сжатия приторцевых участков полосы $P_0 < P^{cr}$ имеет место лишь "чистое" растяжение средней части полосы. При $P_0 \geq P^{cr}$ одновременно с растяжением происходит пластическая осадка участков под захватами. Причем зависимость между скоростью перемещения захватов $u_0(t)$ и толщиной $h(t)$ с учетом уточненного условия (38) для c_5^*, f_1^* можно найти из условия непрерывности $u = u(x, t)$, в точке $X = l_1(t)$: $u_0(t) = -\frac{c_1}{2} (l_1 + l_2) - \bar{f}_1^*$, где \bar{f}_1^* – осредненное по толщине значение функции $f_1^*(y)$.

Теперь найдем законы изменения $l_1(t)$ и $l_2(t)$

$$\begin{aligned} \frac{dl_1}{dt} &= u_0(t); \\ \frac{dl_2}{dt} &= -\frac{c_1}{2} (l_2 - l_1) + \bar{f}_1^* + u_0(t), l_i \Big|_{t=0} = l_{i0}, (i = 1, 2). \end{aligned} \quad (43)$$

Точность использованного решения Л. Прандтля – А. Надаи для осадки пластических полос тем выше, чем меньше его толщина по сравнению с линейными размерами зоны контакта. Поэтому, пренебрегая в (43) членом \bar{f}_1^* , который мал по сравнению с другими слагаемыми

$$\left| \frac{\bar{f}_1^*}{c_1 l_2} \right| \approx \frac{h}{l} \ll 1,$$

Имеем

$$\frac{dl_1}{dt} = -\frac{dh}{h dt} \frac{l_1 + l_2}{2}, \frac{dl_2}{dt} = -\frac{dh}{h dt} l_2(t). \quad (44)$$

Решение полученную систему (38) методом исключения переменных

$$l_2(t) = \frac{l_{20} h_0}{h(t)}, l_1(t) = \left[l_{10} + \sqrt{h_0} l_{20} \left(\frac{1}{\sqrt{h}} - \frac{1}{\sqrt{h_0}} \right) \frac{\sqrt{h_0}}{\sqrt{h}} \right].$$

Подобная задача для частного случая решена в работе [5].

Задача 3. Правка полосы растяжением. Пусть края растягиваемой полосы подвержены сжатию захватами вблизи торцов. Найдем предельное значение общего усилия сжатия торцов, при достижении которого одновременно с растяжением полосы имеет место пластическая осадка сжатых торцов, мешающая осуществлению процесса правки. Сформулируем задачу в рамках теории течения в тонком

пластическом слое:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{d\lambda}{dt} = 0, \quad (45)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{2\tau_s}{h} \frac{u - u_0}{|u - u_0|} = \begin{cases} -\frac{2\tau_s}{h}, & x_0(t) < x < l_2(t) \\ \frac{2\tau_s}{h}, & l_1(t) < x < x_0(t) \end{cases} \quad (46)$$

где $u = u_0(t)$ – скорость движения инструмента в направлении слоя, которая считается заданной; $x = x_0(t)$ – неизвестная линия ветвления течения; $h = h(t)$ – известный закон изменения толщины зажатой части пластины.

Краевые условия задачи:

$$x = x_0(t): u(x, t) = u_0(t), \quad (47)$$

$$x = l_2(t): \sigma_{xx} = -p + \frac{2}{3}\sigma_s + \frac{2}{3}\sigma_s \frac{dt}{d\lambda} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (48)$$

$$x = l_1(t): \sigma_{xx} = -p + \frac{2}{3}\sigma_s + \frac{2}{3}\sigma_s \frac{dt}{d\lambda} \frac{\partial u}{\partial x} = \sigma_s. \quad (49)$$

Условие (48) означает, что граница $x = l_2(t)$ свободна от нагрузок, а (49) подтверждает, что на внутренней границе области контакта $x = l_1(t)$ растягивающее напряжение достигает предельного значения σ_s . Решаем (45) с учетом (46):

$$u(x, t) = \frac{d\lambda}{dt} (x < x_0(t)) + u_0(t). \quad (50)$$

Условия (48) и (49) разрешим относительно контактного давления:

$$p_2 \equiv p(l_2, t) = \frac{4}{3}\sigma_s, p_1 \equiv p(l_1, t) = \frac{1}{3}\sigma_s.$$

Интегрируем уравнение равновесия (46) с учетом условий (48), (49):

$$p = \begin{cases} p_2 + \frac{2\tau_s}{h}(l_2 - x), & x_0(t) < x < l_2(t) \\ p_1 + \frac{2\tau_s}{h}(x - l_1), & l_1(t) < x < x_0(t) \end{cases}. \quad (51)$$

Находим точку ветвления течения $x = x_0(t)$ из условия непрерывности давления в этой точке:

$$p(x_0 + 0, t) = p(x_0 - 0, t) \Rightarrow x_0(t) = \frac{l_1 + l_2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}h. \quad (52)$$

В случае тонкого слоя ($\frac{h}{l} \ll 1$) формула (52) упрощается: $x_0(t) = \frac{l_1 + l_2}{2}$.

Теперь можем найти предельное общее усилие сжатия торцов пластины, приходящееся на единицу ширины, при котором в процессе растяжения пластины из-под сжатых торцов вытекает часть пластической среды:

$$P^{cr} = \int_{l_1}^{l_2} p(x, t) dx =$$

$$\begin{aligned} &= \int_{l_1}^{x_0} \left(p_1 + \frac{2\tau_s}{h}(x - l_1) \right) dx + \int_{x_0}^{l_2} \left(p_2 + \frac{2\tau_s}{h}(l_2 - x) \right) dx = \\ &\quad \left(p_1 x + \frac{2\tau_s}{h} \left(\frac{x^2}{2} - l_1 x \right) \right) \Big|_{x=l_1}^{x=x_0} + \\ &\quad + \left(p_2 x + \frac{2\tau_s}{h} \left(l_2 x - \frac{x^2}{2} \right) \right) \Big|_{x=x_0}^{x=l_2} = \\ &= p_1 x_0 + \frac{2\tau_s}{h} \left(\frac{x_0^2}{2} - l_1 x_0 \right) - p_1 l_1 - \frac{2\tau_s}{h} \left(\frac{l_1^2}{2} - l_1^2 \right) + \\ &+ p_2 l_2 + \frac{2\tau_s}{h} \left(\frac{l_2^2}{2} - l_2^2 \right) - p_2 x_0 - \frac{2\tau_s}{h} \left(l_2 x_0 - \frac{x_0^2}{2} \right) = \\ &= x_0(p_1 - p_2) - p_1 l_1 + p_2 l_2 + \\ &+ \frac{2\tau_s}{h} \frac{1}{2} (2x_0^2 - 2x_0(l_1 + l_2) + l_1^2 + l_2^2) = \\ &= x_0(p_1 - p_2) - p_1 l_1 + p_2 l_2 + \\ &+ \frac{\tau_s}{h} ((x_0 - l_2)^2 + (x_0 - l_1)^2). \end{aligned}$$

Подставим значения p_1, p_2, l_1, l_2 , и учитывая условие для тонкого пластического слоя, получим:

$$\begin{aligned} P^{cr} &= \sigma_s \left(-\frac{l_1 + l_2}{2} + \frac{4l_2 - l_1}{3} + \frac{1}{2h\sqrt{3}}(l_2 - l_1)^2 \right) = \\ &= \sigma_s \left(\frac{5(l_2 - l_1)}{6} + \frac{(l_2 - l_1)^2}{2h\sqrt{3}} \right) = \\ &= \sigma_s \frac{(l_2 - l_1)}{2\sqrt{3}} \left(\frac{5\sqrt{3}}{6} + \frac{l_2 - l_1}{h} \right). \quad (53) \end{aligned}$$

Очевидно, что $P_0 > P^{cr}$.

В качестве примера проведем простой расчет с соответствующими исходными данными

$$l_1 = 10 \text{ мм}, l_2 = 20 \text{ мм}, h = 2 \text{ мм},$$

$$\sigma_s = 17 \text{ МПа}, \left(1 \text{ МПа} = \frac{10^6 \text{ Н}}{\text{м}^2} = 1 \text{ МН/м}^2 \right):$$

$$\begin{aligned} P^{cr} &= \sigma_s \frac{(l_2 - l_1)}{2\sqrt{3}} \left(\frac{5\sqrt{3}}{6} + \frac{l_2 - l_1}{h} \right) = \\ &= \frac{17 \cdot (20 - 10)}{2\sqrt{3}} \left(\frac{5\sqrt{3}}{6} + \frac{10}{2} \right) \approx \\ &\approx \frac{170 \cdot 7,887}{3,464} \approx 387,064 \text{ (Н)}. \end{aligned}$$

Сила сжатия торцевой части полосы с толщиной $h = 2$ мм длиной

$l_2 - l_1 = 10$ мм, и шириной $\delta = 10$ мм в результате равна 0,387064 (кН).

Вывод. В рамках модели идеально-пластического тела в представленной работе решена плоская задача о пластическом растяжении тонкой полосы с одновременным сжа-

сжатием приторцовых участков в режиме однородного поля скоростей деформаций, при котором полоса выдерживает максимальные пластические деформации, сохраняя постоянную толщину на всей ее длине - растягиваемого и сжатых участков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Прандтль, Л.* Примеры применения теоремы Генки к равновесию пластических тел / Л. Прандтль. Теория пластичности. Сборник статей. – М.: Гос. изд. Иностранной литературы. – 1948. – С. 102-113 [Prandtl L. Anwendungsbeispiele zu einem Henckyschen Satz iiber das plastische Gleichgewicht// ZAMM. 1923. Bd.3. H.6.Pp. 401-406].
2. *Георгиевский, Д.В.* Избранные задачи механики сплошной среды/ Д.В. Георгиевский. – М.: ЛЕНАНД, 2018. – 560 с.
3. *Kadymov, V.A.* Contact problems of plastic flow in a thin layer: theory: Analysis of solutions and applications/ V.A. Kadymov, E.N. Sosenushkin, E.A. Yanovskaya// Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2022. – Т. 51. – № 3. – 206-215.
4. *Sosenushkin, E.N.* Exact Solutions to an Evolution Equation of Plastic Layer Flow on a Plane / E.N. Sosenushkin, V.A. Kadymov, E.A. Yanovskaya //Moscow University Mechanics Bulletin, 2016, Vol.71, №3, pp. 69-72. © Allerton Press, Inc., 2016. ISSN 0027-1330
5. *Yanovskaya, E.A.* Some Approaches to the Design of Partial Solutions for Nonlinear Equation of Mathematical Pysics/ V.A. Kadymov, E.A. Yanovskaya// Nonlinearity Problems, Solutions and Applications. Vol. 1. New York: Nova Sciens Publishers, 2017. Pp. 171-201. ISBN 978-1-53612-032-5.
6. *Кадымов, В.А.* Математическое моделирование контактных задач пластического течения [Монография]/ В.А. Кадымов. – Saarbrücken: Palmarium Academic Publishing, 2016. – 129 с.
7. *Sosenushkin E.N.* The parameters of the stress state in the opérations of plasnic deformation / E.N. Sosenushkin, V.A. Kadymov, E.A. Yanovskaya, A.A. Tatarencev, A.E. Sosenushkin // Key Engineering Materials. 2016. Т. 684. С. 57-66.
8. *Сосенушкин, Е.Н.* Моделирование напряженно-деформированного состояния при обработке давлением/ Е.Н. Сосенушкин, В.А. Кадымов, Е.А. Яновская и др.// Известия ТулГУ. Технические науки. – 2017. – № 11-1. – С.82- 100.
9. *Сосенушкин, Е.Н.* Кинематическая и динамическая модели механики деформируемого твердого тела/ Е.Н. Сосенушкин, В.А. Кадымов, Е.А. Яновская и др. // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2016. – Т. 18. – № 1(2). – С. 300 - 308.
10. *Ильюшин, А.А.* Труды (1946-1966). Т.2. Пластичность/ А.А. Ильюшин. – М.: Физматлит, 2004. – 480 с.
11. *Кийко, И.А.* Течение тонкого слоя пластического материала по упруго-деформируемым поверхностям/ И.А. Кийко // Инжен. журн. – 1965. – Т. 5. – Вып. 2. – С. 372-375.
12. *Надаи, А.* Пластичность. Механика пластического состояния вещества [перевод с англ. под ред.]Т.С. Лебензона] / А. Надаи. – М.: Объединенное научно-техническое издательство НКТП СССР, 1936.

ON THE PROBLEM OF COMBINED LOADING OF A STRIP

© 2024 V.A. Kadymov¹, E.N. Sosenushkin², E.A. Yanovskaya², S.A. Rogulin²

¹ Russian Technological University "MIREA", Moscow, Russia

²Moscow State Technological University "STANKIN", Moscow, Russia

The article was received by the editor on May 22, 2024

The article presents the formulation and solution of a plane problem of stretching a plastic strip, the ends of which are sandwiched between two parallel rough planes, supplemented by the asymmetry of conditions on the spreading near-end zones. An upper estimate has been found for the total compression force by the grips of the end regions of a plastically stretchable strip, upon reaching which, simultaneously with the plastic stretching of the strip, plastic settlement of its near-end parts occurs. It is shown that with further deformation, thinning and rupture occur not in its middle stretchable part, but near the inner boundary of the contact near the grip.

Key words: plane problem, tension and compression of sections of a plastic strip.

DOI: 10.37313/1990-5378-2024-26-3-140-146

EDN: HMFNWO

REFERENCES

1. *Prandtl', L.* Primery primeneniya teoremy Genki k ravnovesiyu plasticheskikh tel / L. Prandtl'. Teoriya plastichnosti. Sbornik statej. – М.: Gos. izd. Inostrannoj literatury. – 1948. – S. 102-113 [Prandtl L. Anwendungsbeispiele zu einem Henckyschen Satz iiber das plastische Gleichgewicht// ZAMM. 1923. Bd.3. H.6.Pp. 401-406].
2. *Georgievskij, D.V.* Izbrannye zadachi mekhaniki sploshnoj sredy/ D.V. Georgievskij. – М.: LENAND, 2018. – 560 s.
3. *Kadymov, V.A.* Contact problems of plastic flow in a thin layer: theory: Analysis of solutions and applications/ V.A. Kadymov, E.N. Sosenushkin, E.A. Yanovskaya// Journal of Machinery Manufacture and

- Reliability. – 2022. – Т. 51. – № 3. – 206-215.
3. Sosenushkin, E.N., Exact Solutions to an Evolution Equation of Plastic Layer Flow on a Plane / E.N. Sosenushkin, V.A. Kadymov, E.A. Yanovskaya // Moscow University Mechanics Bulletin, 2016, Vol.71, №3, pp. 69-72. © Allerton Press, Inc., 2016. ISSN 0027-1330
 4. Yanovskaya, E.A. Some Approaches to the Design of Partial Solutions for Nonlinear Equation of Mathematical Physics/ V.A. Kadymov, E.A. Yanovskaya// Nonlinearity Problems, Solutions and Applications. Vol. 1. New York: Nova Sciens Publishers, 2017. Pp. 171-201. ISBN 978-1-53612-032-5.
 5. Kadymov, V.A. Matematicheskoe modelirovanie kontaktnykh zadach plasticheskogo techeniya [Monografiya]/ V.A. Kadymov. – Saarbrücken: Palmarium Academic Publishing, 2016. – 129 s.
 6. Sosenushkin E.N. The parameters of the stress state in the operations of plastic deformation / E.N. Sosenushkin, V.A. Kadymov, E.A. Yanovskaya, A.A. Tatarencev, A.E. Sosenushkin // Key Engineering Materials. 2016. T. 684. C. 57-66.
 7. Sosenushkin, E.H. Modelirovanie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya pri obrabotke davleniem/ E.N. Sosenushkin, V.A. Kadymov, E.A. Yanovskaya i dr.// Izvestiya TulGU. Tekhnicheskie nauki. – 2017. – № 11-1. – S.82-100.
 8. Sosenushkin, E.N. Kinematische i dinamicheskaya modeli mekhaniki deformiruemogo tverdogo tela/ E.N. Sosenushkin, V.A. Kadymov, E.A. Yanovskaya i dr. // Izvestiya Samarskogo nauchnogo centra Rossijskoj akademii nauk. – 2016. – Т. 18. – № 1(2). – S. 300 - 308.
 9. Il'yushin, A.A. Trudy (1946-1966). T.2. Plastichnost'/ A.A. Il'yushin. – M.: Fizmatlit, 2004. – 480 s.
 10. Kijko, I.A. Tehenie tonkogo sloya plasticheskogo materiala po uprugo-deformiruемым poverhnostyam/ I.A. Kijko// Inzhen. zhurn. – 1965. – Т. 5. – Vyp. 2. – S. 372-375.
 11. Nadai, A. Plastichnost'. Mekhanika plasticheskogo sostoyaniya veshchestva [perevod s. angl. pod red. J.T.C. Lebenzona] / A. Nadai. – M.: Ob'edinennoe nauchno-tekhnicheskoe izdatel'stvo NKTP SSSR, 1936.

Vagid Kadymov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor.

Evgeniy Sosenushkin, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of Department of Composite Materials. E-mail: sen@stankin.ru

Elena Yanovskaya, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics. E-mail: elena_yanovskaya@bk.ru

Sergey Rogulin, Lecturer.