УДК 681.5

К АПОСТЕРИОНОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ СПЕКТРА ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА НОРМАЛЬНО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

© 2024 Р.А. Данеев[1], В.А. Русанов[2]

[1] Восточно-Сибирский институт МВД России, г. Иркутск, Россия
[2] Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН, г. Иркутск, Россия

Статья поступила в редакцию 15.04.2024

Определены базовые положения, лежащие в основе алгоритмических процедур реализации Калмана-Месаровича с уравнениями состояния в классе линейных стационарных обыкновенных дифференциальных уравнений для моделирования распределенных управляемых динамических систем. В данном контексте интерпретируются ключевые подходы к решению вопросов идентификации дискретного спектра эллиптического оператора моделируемой диссипативной системы нормально-гиперболического типа.

Ключевые слова: динамическая система нормально-гиперболического типа, идентификация спектра эллиптического оператора.

DOI: 10.37313/1990-5378-2024-26-3-122-129
EDN: ELWNLS

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (проект: 121041300056-7).

ВВЕДЕНИЕ

Задача апостериорного математического моделирования управляемых динамических процессов возникает во многих разделах науки и техники и связана с задачей параметрической идентификации [1-4] сложных динамических систем. В этом контексте в статье дано строгое аналитическое обоснование разрешимости задачи идентификации дискретного спектра эллиптического оператора моделируемой нормально-гиперболической системы. Её многие теоретико-системные конструкции служат отправными точками развития общей теории многомерных систем управления [5], попутно создавая им репутацию полезного инструмента в апостериорном математическом моделировании распределенных динамических систем, в частности, в вопросах адаптивной космодинамики [3, 4, 6]. В целом отметим, что потребность в построении общей теории реализации распределенных нормально-гиперболических систем ощущалась давно (первый аналитический шаг в этом направлении сделал Колмогоров[1]) в связи с развитием общих обратных задач математической физики.

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

Теория идентификации динамических объектов с распределёнными параметрами методологически тесно связана с задачи «*спектральной идентификации*» поскольку именно спектральная теория операторов лежит в фундаменте модальной теории управления [5], нашедшей самое широкое применение в управлении реальными распределёнными системами, в частности, больших космических конструкций [3]. При этом в соответствии с общим направлением современного системного анализа к апостериорному моделированию будем обращать основное внимание на геометрическое содержание этих понятий, стараясь представить все результаты в терминах общих математических конструкций [3] идентификационного процесса в технологии «*вход–выход*». В свою очередь, постановка задач реализации и спектральной идентификации приводит к размышлению о том, как наиболее естественно формализовать динамику диссипативно-волновых процессов применительно к технологиям идентификации, в том числе, динамики упругого спутника гиростата [6]; так как

Данеев Роман Алексеевич, кандидат технических наук, доцент кафедры информационных технологий.
E-mail: romasun@mail.ru
Русанов Вячеслав Анатольевич, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Института динамики и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН. E-mail: v.rusanov@mail.ru

[1] Статья А.Н. Колмогорова в ДАН СССР (1940, т. 26, с. 6-9) с задачей реализации вида: каковы аналитические условия, при которых пучок кривых в гильбертовом пространстве X есть фазовый поток на R, т.е. характеризация траекторий системы как орбит её движения относительно однопараметрической группы преобразований R, действующей в X.

тесное взаимодействие между абстрактным и конкретным представляет собой не только наиболее полезную, но и наиболее пленительную сторону качественной теории идентификации.

Пусть R – поле вещественных чисел, $V := D\times\left(t^0,\infty\right)$ – бесконечный пространственно-временной цилиндр, где $\left(t^0,\infty\right)\subset R, D$ - ограниченная открытая область в R^k с мерой Лебега m^k и её граница dD – кусочно-гладкая функция. Следуя общепринятой символике, через $C^l\left(\left[D\right]_{R^k}\right)$, где $\left[D\right]_{R^k}$ – замыкание области D в R^k, обозначим пространство всех непрерывных вещественных функций на компакте $\left[D\right]_{R^k}$, обладающих непрерывными частными производными до l-го порядка включительно в точках этого компакта, через $D(V)$ - пространство всех вещественных бесконечно дифференцируемых финитных функций на V со стандартной (неметризуемой секвенциально-полной – определение 6.3 [7, с. 162]) на нём топологией, через $D(V)^*$ - векторное пространство, топологически сопряжённое к $D(V)$.

Рассмотрим в пространственно-временном цилиндре V движение волны $v(z,t)$, описываемое линейным неоднородным нормально-гиперболическим уравнением [8, с. 467] вида:

$$\rho(z)\frac{d^2\upsilon(z,t)}{dt^2} = f(z)\frac{d\upsilon(z,t)}{dt} + div\left(r(z)grad(z)\right) - q(z)\upsilon(z,t) + \sum b_j(z)u_j(t) =:$$
$$= f(z)\frac{d\upsilon(z,t)}{dt} - L\left(\upsilon(z,t)\right) + \sum b_j(z)u_j(t), \quad j=1,\ldots,m, \quad (z,t)\in V, \tag{1}$$

со следующими начальными и граничными условиями:

$$\begin{cases} \upsilon(z,t)\big|_{t=t^0} = \upsilon_0(z), \quad \left.\dfrac{d\upsilon(z,t)}{dt}\right|_{t=t^0} = \upsilon_1(z), \quad z\in\left[D\right]_{R^k}; \\ \alpha(z)\upsilon(z,t) + \beta(z)\left.\dfrac{d\upsilon(z,t)}{dn}\right|_{dD} = 0, \quad t\ge t^0, \end{cases} \tag{2}$$

$$f,\rho,q,b_j\in C\left(\left[D\right]_{R^k}\right), \quad r\in C^1\left(\left[D\right]_{R^k}\right), \quad \alpha,\beta\in C(dD),$$
$$\rho, r, (\alpha+\beta) > 0, \quad q,\alpha,\beta\ge 0,$$
$$\upsilon_0\in C^2(D)\cap C^1\left(\left[D\right]_{R^k}\right),$$
$$\upsilon_1\in L_2\left(D,\mu^k,R\right)$$

и, наконец, укажем, что $u_j(\cdot)\in L_p\left(\left[t^0,\infty\right],\mu,R\right), 1\le p\le\infty$; здесь L_2 (соответственно, L_p) - обычное лебегово пространство классов эквивалентности всех m-измеримых вещественных функций, суммируемых с квадратом (аналогично, p-ой степенью от модуля), n - внешняя нормаль к dD.

Всюду в дальнейшем считаем, что собственные функции $\{f_j\}$ эллиптического оператора

$$L: C^2(D)\cap C^1\left(\left[D\right]_{R^k}\right)\to L_2\left(D,\mu^k,R\right),$$

удовлетворяющего задаче (1), (2), вещественны и образуют полную ортонормальную систему в $L_2(D,\eta,R)$, где мера $\eta(U) := \int_U \rho(z)\mu^k(dz_1\times\ldots\times dz_k)$; достаточные условия, при которых реализуются эти предположения см., например, в [8, с. 331]. В такой постановке выполняются соотношения

$$L\left(\varphi_j(\cdot)\right) = s_j\rho(\cdot)\varphi_j(\cdot), \tag{2'}$$

где $\{s_j\}$ - собственные числа оператора L.

Далее, рассмотрим функционал $v\in D(V)^*$ с аналитическим представлением

$$(z,t)\mapsto\upsilon(z,t) := \sum y_j(t)\varphi_j(z), \quad j=1,2,\ldots, \quad (z,t)\in V, \tag{3}$$

где y_j – суть функция, абсолютно непрерывная на любом отрезке из $[t^0,\infty)$, при этом считаем, что

$$y_j\left(t^0\right) = <\nu_0,\phi_j>_\eta, \quad \left.\frac{dy_j(t)}{dt}\right|_{t=t^0} = <\nu_1,\phi_j>_\eta,$$

и $<\cdot,\cdot>_\eta$, – операция скалярного произведения в гильбертовом пространстве $L_2(D,\eta,R)$. Функционал (3) назовём *волновым динамическим процессом* в пространственно-временном цилиндре V, если (3) – суть обобщённое решение [8, с. 492] задачи (1), (2).

Теперь, не перетруждая общим математическим формализмом, внесем необходимые ниже пространственно тополого-алгебраические конструкции. Пусть $(X,d_X(\cdot,\cdot))$ – вещественное пространство Фреше [7, с. 15] (т.е. линейное локально выпуклое F-пространство с топологией, порождённой полной инвариантной метрикой d_X), X^+ – пространство [9, с. 110], алгебраически сопряжённое к X, X^* – пространство [9, с. 107], топологически сопряжённое к X; ясно, что $X^*\subset X^+$), и X_σ – пространство X, снабжённое слабой топологией $\sigma(X,X^*)$. При этом будем говорить, что X пространство типа F-(*+), если X^* содержит Y - счётное тотальное подмножество [9, с. 110]; в частности [10], любое конечномерное X обладает типом F-(*+) и счётное произведение (декартово) пространств типа F-(*+) является таковым с метризуемой топологией произведения. В данной постановке базис Гамеля (алгебраический базис [11, с. 123]) в X^+ может быть (*не более чем*) счётным только в случае *конечномерного* X. Кроме того, если A – бесконечный базис (Гамеля) в X, то алгебраическая размерность X^{++} равна 2^{2^A}, и значит равенство $X^{++}=X$ невозможно; заметим, что X^+ полно в топологии $\sigma(X^+,X)$ (лемма 4 [9, с. 118]), тогда как (вне случая конечномерного X) Span Y_σ – неполно (теорема 2 [11, с. 70]).

Далее, пусть $T := \left[t_0,t_1\right]$ – отрезок числовой прямой R с мерой Лебега μ. Непрерывное отображение $\varepsilon: T\to X$ назовём слабо абсолютно непрерывным, если для любого функционала $x^*\in X^*$ функция $<x^*,\varepsilon(\cdot)>_X: T\to R$ (здесь $<\cdot,\cdot>_X$ – каноническая билинейная форма, устанавливающая двойственность между топологическими векторными пространствами X и X^*) – абсолютно непрерывная, при этом семейство всех таких векторных отображений условимся обозначать через $AC(T,X)$. Не пренебрегая условностями, будем говорить, что вектор $x\in X$ – суть производная от функции $\varepsilon : T \to X$ в точке $t\in T$ (или равнозначно, – функция e(·) дифференцируема в T), если имеет место сходимость вида:

$$\lim\left\{|\tau - t|^{-1}\left(\varepsilon(\tau)-\varepsilon(t)-(\tau-t)x\right) : \tau \to t, \tau \neq t,\ \tau\in T\right\}=0\in X$$

с рассмотрением предела в топологии F_X, при этом e(·) назовём дифференцируемой m-почти всюду в T, если это справедливо при m-почти всех $t\in T$; производную функции e(·) в точке t будем обозначать символом $\dfrac{d\varepsilon(t)}{dt}$ (соответственно, функцию производной через $\dfrac{d\varepsilon(\cdot)}{dt} := t \mapsto \dfrac{d\varepsilon(t)}{dt}$).

Выделим к рассмотрению класс линейных систем с «*программно-позиционным*» управлением, и описываемых в F-(*+)-пространстве состояний X дифференциальным уравнением

$$\frac{dx(t)}{dt} \cdot=\cdot Ax(t)+Bu(t),\quad t\in T\ , \tag{4}$$

здесь ·=· – равенство μ-почти всюду, $x(\cdot)\in AC(T,X)$ – решение типа Каратеодори (K-решение), $u(\cdot)\in L_p(T,\mu,R^m)$ – вектор-функция управления, $A\in L(X,X)$, $B\in L(R^m,X)$, $L(X,X)$ – пространство всех линейных непрерывных операторов, действующих из X в X (соответственно $L(R^m,X)$ – из R^m в X).

Определение 1. *Сильной неопровержимой стационарной операторной* (A,B)*-моделью над*

$$N\subset AC(T,X)\times L_p(T,\mu,R^m)$$

назовём любую упорядоченную пару $(A,B)\in L(X,X)\times L(R^m,X)$, *для которой дифференциальная система* (4) *включает семейство динамических процессов N в класс своих допустимых K-решений*.

Замечание 1. Вариант линейной редакции общей теории апостериорного математического моделирования динамических систем в математическом формализме определения 1 может служить подтверждением принципа фальсификации в концептуальном порядке критического рационализма Поппера[2], поскольку именно в этой редакции, как нельзя лучше, проявляются не только достижения научного подхода к построению сложных математических моделей физического мира, но и их неизбежная гносеологическая ограниченность. И всё же, вопреки этому методологическому ограничению, теория линейных управляемых систем, бесспорно, заслуживает скрупулёзного изучения и даёт богатые возможности для понимания локальных свойств моделей нелинейной динамики.

2. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕАЛИЗАЦИИ НОРМАЛЬНО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Как обычно [11, с. 121], через R^∞ обозначим топологическое произведение счётного семейства действительных прямых [9, с. 34], которое, согласно [9, сс. 33, 36], является пространством типа F-(*+), через X обозначим F-(*+)-пространство $R^\infty\times R^\infty$. Рассмотрим на интервале $T:=[t_0,t_1]$ в пространстве состояний X уравнение дифференциальной реализации (4) с $u(\cdot)\in L_p^m(T,\mu,R)$ и линейными непрерывными операторами A: $X\to X$ и B: $R^m\to X$, имеющими следующую блочную структуру:

$$A:=\begin{bmatrix} 0_\infty^\infty & id_{R^\infty} \\ -S & G \end{bmatrix},\qquad B:=\begin{bmatrix} 0_m^\infty \\ B_m^\infty \end{bmatrix}, \tag{5}$$

где $0_\infty^\infty : R^\infty \to R^\infty$ и $0_m^\infty : R^m \to R^\infty$ – суть нулевые линейные операторы, G: $R^\infty \to R^\infty$, S: $R^\infty \to R^\infty$ и $B_m^\infty : R^m \to R^\infty$ – линейные операторы, у которых ij-ми элементами (в матричном представлении), согласно (2´), служат скалярные произведения:

$$b_{ij} = \left\langle \phi_i(\cdot), b_j(\cdot)\right\rangle_{\mu k} \text{ (для оператора } B_m^\infty\text{)},$$

$$g_{ij} = \left\langle \phi_i(\cdot), f(\cdot)\phi_j(\cdot)\right\rangle_{\mu k} \text{ (для оператора } G\text{)},$$

где $<\cdot,\cdot>_\mu k$ – скалярное произведение в гильбертовом пространстве $L_2(D,\mu^k,R)$, при этом полагаем, что функции f и f_j, j=1,2,... таковы, что для каждого индекса i все числа g_{ij}, за исключением конечного числа, равны 0. Кроме того, согласно (2’), очевидно, будет:

$$s_{ij} = <\phi_i(\cdot), s_j\phi_j(\cdot)>_\eta = \begin{cases} s_j,\ i=j, \\ 0,\ i\neq j. \end{cases}$$ (для оператора S),

Если условиться, что

$$t\mapsto x(t) := \left(y(t), \frac{dy(t)}{dt}\right), \tag{6}$$

где $t\mapsto y(t)$ в координатном разложении удовлетворяет (3), то дифференциальное уравнение (4)-(6) получается из выражений (1)-(3) посред-

[2] Попер (Popper) Карл Раймунд – философ, логик, социолог, яркий представитель аналитической философии. Выдвинул принцип фальсификации (опровержимости), согласно которому критерий научности теории определяется возможностью её опровержимости опытом.

ством канонической процедуры метода Фурье [8, с. 467] для задачи неоднородного уравнения нормально-гиперболического типа. Далее, по аналогии с терминологией из [5, с. 38], конечномерное подпространство $E \subset X$ назовём A-циклическим, если для оператора A из (5) эндоморфизм $A|E$ является циклическим. Также будем говорить, что A обладает рациональным блочно-диагональным представлением[3], если существует такой линейный изоморфизм $W: R^\infty \to X$, что $W^{-1}AW = diag[A_1, A_2, \ldots]$, где A_i (i=1,2,...) - некоторые квадратные матрицы.

Лемма 1. *Пусть* $T := [t_0, t_1] \subset T_\infty$ $u(\cdot) \in L_p^m(T, \mu, R)$ *и оператор A из* (5) *обладает рациональным блочно-диагональным представлением. Тогда на T существует и единственно K-решение системы* (4), (5) *с любым начальным условием* $x(t_0)$.

Очевидно, что утверждение о реализации (A,B)-модели в пространстве типа F-(*+) имеет конструктивную (с позиций построения адекватной численной процедуры) интерпретацию в варианте, когда Card N=1 (достаточном в большинстве прикладных задач) и пространство состояний X (системы (4)) сужено до $W^{-1}AW$-циклического подпространства - R^n. Более того, в этой постановке егл можно дополнить характеристическим признаком *единственности* автономной (A,B)-модели над N. При этом вариант $\aleph_0$ >Card $N^1$1 ($\aleph_0$ – алеф нуль) по существу является прямым индуктивным расширением варианта Card N=1. Но прежде чем сформулировать это интерпретирующее утверждение, условимся (в целях удобства), что $L_2(T,\mathrm{m},R^m):=L_2^m(T,\mathrm{m},R)$, где T:=[0,π], $L_2(T,\mathrm{m},R)$ – пространство классов эквивалентности (по mod m) всех вещественных m-измеримых функций, суммируемых с квадратом на T, и пусть N:={($x^\#$,$u^\#$)}$\subset AC(T,R^n)$´$L_2^m(T,\mathrm{m},R)$. В данной постановке рассмотрим определители Грамма $D^\#, D_k^\#$, построенные относительно функциональных семейств

$$\left\{x_i^\#(\cdot),\ u_j^\#(\cdot):\ i=1,\ldots,n;\ \ j=1,\ldots,m\right\},$$

$$\left\{\frac{dx_k^\#(\cdot)}{dt},\ x_j^\#(\cdot), u_j^\#(\cdot):\ i=1,\ldots,n;\ \ j=1,\ldots,m\right\},$$

где col($x^\#_1$,...,$x^\#_i$,...,$x^\#_n$)=$x^\#$, col($u^\#_1$,...,$u^\#_j$,...,$u^\#_m$)=$u^\#$, со скалярным произведением из пространства $L_2(T,\mathrm{m},R)$, а также введем две системы векторов (канонические разложения Фурье [11, с. 393]):

$$\left\{x_i^\#(\cdot),\ u_j^\#(\cdot):\ i=1,\ldots,n;\ \ j=1,\ldots,m\right\},$$

$$\left\{\frac{dx_k^\#(\cdot)}{dt},\ x_j^\#(\cdot), u_j^\#(\cdot):\ i=1,\ldots,n;\ \ j=1,\ldots,m\right\},$$

[3] Оператор А будет таковым (т.е. существует приведение А к блочно-диагональной структуре), если, например, блочная структура (5) соответствует не диссипативному процессу в (1) (т.е. когда $f(\cdot)\equiv 0$), или когда демпфирование достигается за счёт соотношения $f(\cdot)$=-$cr(\cdot)$ (c=const>0).

Теорема 1. *Пусть* ($x^\#$,$u^\#$)Î$AC(T,R^n)$´$L_2^m(T,\mathrm{m},R)$. *Тогда справедливы утверждения*:

а) стационарная операторная (A,B)-*модель над* ($x^\#$,$u^\#$) *существует в том и только в том случае, если для всякого конечного набора* D *натуральных чисел, такого, что*

$$rank\left[z_i^+\right]_{i\in\Delta} = Card\Delta - 1,\ z_i^+ \in \Xi,$$

из $\sum \alpha_i^+ z_I^+ = 0, i \in \Delta, \alpha_i^+ \in R$ *следует* $\sum \alpha_i^+ z_i^- = 0, i \in \Delta, z_i^- \in \Theta$, *при этом данная операторная* (A,B)-*модель будет единственной, если и только если* $D^\# \neq 0$;

б) стационарная (A,B)-*модель над* ($x^\#$,$u^\#$) *существует и единственна при и только при условии*

$$\frac{dx_k^\#(\cdot)}{dt} \in L_2(T, \mu, R), D_k^\# = 0,\ k = 1,\ldots,n.$$

Замечание 2. *Во-первых*: проверку свойства rank $\left[z_i^+\right]_{i\in\Delta} = Card\,\Delta - 1$ можно осуществить, используя SVD-разложение (теорема 7.3.5 [10, с. 492]); необходимо предостеречь, что это свойство (как и условие $D_k^\# = 0$) не является типическим [5, с. 52].

Во-вторых: поскольку «линейных материальных объектов» (см. замечание 1) в природе в чистом виде не бывает, то при апостериорном построении математических моделей речь можно вести лишь о линейных приближениях и только в данном контексте о линейных динамических объектах. В этой связи пункт *а)* теоремы 1 позволяет конкретизировать практическую проверку обоснованности линеаризации с позиций выявления «изотропности»[4] математической структуры наблюдаемого физического процесса, связав её с формальным конструктивным признаком, на основании которого производится «оценка адекватности» (см. ниже замечание 3) линеаризации модели динамики (дифференциальной системы (4)-(6)). Критерий этот, очевидно, следует связать с допуском на выбор множеств D, в частности, с «усечением» натурального ряда некоторым фиксированным натуральным числом k (т.е. неполная индукция) при задании множеств Δ, а именно, $i \in \Delta \Rightarrow i \leq k$.

В-третьих: кажущееся, на первый взгляд, возможное методологическое преимущество, обеспечиваемое утверждением *б)* в сравнении с предложением *а)*, не должно приводить нас к переоценке его потенциальной эффективности.

[4] Линеаризация математической модели динамики «материального объекта» сродни свойству «памяти» модели о линейной структуре пространства произведения «вход x выход» (принцип суперпозиции [13]); чем полнее (во времени и пространстве) модель охватывает математическую структуру физического явления, тем относительно более усиливается её субстанциональная компонента и ослабевает пространственно-императивный характер её локального поведения.

В частности, если конструкция пары «*траектория, управление*» представлена в виде графика временной вектор-функции, то в этом случае индуктивному перебору по Δ из пункта *а)* в позиции *б)* может соответствовать более трудоёмкий вычислительный процесс дифференцирования координат x_k вектора состояния и проверки условий $\dfrac{dx_k(\cdot)}{dt} \in L_2(T,\mu,R),\ D_k^{\#} \equiv 0,\ k=1,\dots,n;$ небольшая практика здесь предпочтительнее длинных объяснений (см. также [12]).

Замечание 3. Обоснование (скорее оправдание принципа суперпозиции [13]) выбора *линейности структуры* модели динамики сводится, как правило, к доказательству возможности линеаризации структуры правой части уравнения состояний

$$F(x^{\#}+x,u^{\#}+u) \approx F(x^{\#},u^{\#}) + A^{\#}x + B^{\#}u$$

исследуемого объекта, т.е. исключительно к подтверждению инфинитезимального утверждения:

$$F(x^{\#}+x,u^{\#}+u) - F(x^{\#},u^{\#}) - A^{\#}x - B^{\#}u = o(\|(x,u)\|),$$

т.е. ($A^{\#}x+B^{\#}u$) – дифференциал Фреше при (A,B)-модели ($A^{\#}$,$B^{\#}$), и никак (при этом) не учитывается характер производных отображения F высших порядков. Более того, конструкция $\approx$ может быть оправдана формулой конечных приращений [11, с. 482], т.е. (A,B)-модель – как производная Гато.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ СПЕКТРА ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

Пусть $(z,t) \mapsto \nu(z,t) := \sum_{j=1,\dots,n} y_j(t)\phi_j(z)$ – фиксированное обобщённое решение (3), отвечающее собственному движению (т.е. $u \equiv 0$) объекта (1). Согласно лемме 1 и представлению (6) эквивалентная траектория $t \mapsto x(t)$ системы (4) с оператором A из (5) лежит в некотором A-циклическом подпространстве, и пусть $\{\varphi_i \in L_2(D,\mu^k,R):\ i=1,\dots,n\}$ – комплекс прецизионных измерителей [6]; система $\{\varphi_i\}_{i=1,\dots,n}$ определяет D-геометрию мест датчиков съёмки информации с волнового динамического процесса $(z,t) \mapsto \nu(z,t)$. В такой постановке для интервала наблюдения $T \subset [t^0,\infty)$ (величина T не существенна) рассмотрим задачу: охарактеризовать динамические процессы наблюдения

$$t \mapsto <\upsilon(z,t),\varphi_i(z)>_{\mu^k} : T \to R,\ i=1,\dots,n,$$

по которым можно определить n элементов спектра $\{s_j\}$ оператора L уравнения (1). Данную задачу назовем *спектральной идентификацией* (СИ) с индексом n для эллиптического оператора L.

Далее, пусть $c_{ij}:=<f_j,j_i>_m k$, $C:=[c_{ij}] \in L(R^n,R^n)$, тогда как через $t \mapsto w(t)$ обозначим вектор-функцию, доступную измерению (комплекса датчиков $\{\varphi_i\}_{i=1,\dots,n}$) и построенную согласно правила:

$$t \mapsto w(t) := col(<\nu(z,t),\varphi_1(z)>_{\mu^k},\dots,<\nu(z,t),\varphi_n(z)>_{\mu^k}) = Cy(t),$$

где $y(t)$:=col($y_1(t)$,…,$y_n(t)$), при этом считается, что матрица C невырожденная, что является типическим свойством [5, с. 52]. Тогда в силу уравнений (1)-(5) и метода Фурье [8] будет:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y(t)}{dt^2} = \dfrac{Gdy(t)}{dt} - Sy(t); \\ w(t) = Cy(t),\ w(t) \in R^n,\ t \in T, \end{cases} \tag{7}$$

где, согласно блочно-матричного представления оператора A из (5), матрица G симметричная, а S диагональная с элементами по диагонали, равными s_j из спектра $\{s_j\}$. Таким образом, переформулировка СИ-задачи с индексом n для оператора L из (1) выглядит так:

Определение 2. *СИ-задачей является: при неизвестных матрицах G, S, C системы* (7) *получить характеризацию вектор-функции* $t \mapsto w(t)$, $t \in T$:=[t_0,t_1], *позволяющей восстановить спектр S.*

С целью алгоритмического решения означенной спектральной задачи введем вспомогательные матричные конструкции (ниже «*» – операция транспонирования). Обозначим через $\Gamma^{\#}$ матрицу

$$\Gamma^{\#} := \int_T \left[\frac{d^2w(t)}{dt^2}\right] \times \left[col\left(w(t),\frac{dw(t)}{dt}\right)\right]^* \mu(dt),$$

соответственно

$$\Gamma := \int_T \left[col\left(w(t),\frac{dw(t)}{dt}\right)\right] \times \left[col\left(w(t),\frac{dw(t)}{dt}\right)\right]^* \mu(dt),$$

и разобьём данные матрицы на n´n-блоки $\Gamma_i^{\#}$, Γ_{ij}, i=1,2, j=1,2:

$$\Gamma^{\#} =: [\Gamma_1^{\#},\Gamma_2^{\#}];\ \ \Gamma =: \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix},\ H := \Gamma_{22} - \Gamma_{21}\Gamma_{11}^{-1}\Gamma_{22}.$$

Теорема 2. *Спектральная идентификация с индексом n эллиптического оператора уравнения* (1) *разрешима, если и только если минимальный многочлен вектора* $col\left(w(t),\dfrac{dw(t)}{dt}\right)$, $t=t_0$ *относительно матрицы*

$$A^0 := \begin{bmatrix} 0_n & I_n \\ -CSC^{-1} & CGC^{-1} \end{bmatrix},$$

где 0_n и I_n – соответственно нулевая и единичная $n \times n$-матрицы, имеет степень $2n$. В этом случае диагональные элементы (спектр) матрицы S совпадает со спектром матрицы

$$\left(\Gamma_2^{\#}H^{-1}\Gamma_{21} - \Gamma_1^{\#}\left(I_n + \Gamma_{11}^{-1}\Gamma_{12}H^{-1}\Gamma_{21}\right)\right)\Gamma_{11}^{-1}.$$

Доказательство. (*Достаточность*). Пусть $x(\cdot)$: $T \to R^{2n}$ – решение системы $\dfrac{dx(t)}{dt} = A^0x(t),\ t \in T$ с начальным условием $x(t_0) = col\left(w(t), \dfrac{dw(t)}{dt} \right)\Bigg|_{t=t_0}$ и пусть минимальный многочлен вектора $x(t_0)$ относительно матрицы A^0 имеет степень равную $2n$. Тогда система функций $\{x_i(\cdot): i=1,\dots,2n\}$, где $x_i(\cdot)$ – координаты вектор-функции $x(\cdot)$, линейно независима в пространстве $L_2(T,\mathrm{m},R)$ и, следовательно, согласно теоремы 1 [12, с. 213] матрицы Γ и Γ_{11} будут невырожденные. Ясно, что $A^0=\Gamma^{\#}\Gamma^{-1}$, откуда в силу невырожденности Γ_{11} и формулы Фробениуса (86) [12, с. 57] имеет место

$$CSC^{-1} = \left(\Gamma_2^{\#} H^{-1}\Gamma_{21} - \Gamma_1^{\#}\left(I_n + \Gamma_{11}^{-1}\Gamma_{12}H^{-1}\Gamma_{21}\right)\right)\Gamma_{11}^{-1}; \quad (8)$$

здесь учтено, что невырожденность $H=\Gamma_{22}-\Gamma_{21}\Gamma_{11}^{-1}\Gamma_{22}$ следует из невырожденности Γ, Γ_{11} [12, с. 56].

(*Необходимость*). Для вычисления (по данным измерения выхода $\left(w(t), \dfrac{dw(t)}{dt} \right)$, $t_0 \le t \le t_1$ на собственном движении объекта (7)) любой матрицы, подобной матрице S, в силу (8) необходимо, чтобы матрицы Γ_{11} и H были невырожденными и, следовательно [12, с. 56], была невырожденной матрица Γ. Откуда (см. теорему 1 [12, с. 213]) необходимо, чтобы система функций $\left\{ w_i(\cdot), \dfrac{dw_i(\cdot)}{dt} : i = 1,\dots,n \right\}$, где $w_i(.)$ – координаты вектор-функции $w(\cdot)$, была линейно независима в $L_2(T,\mathrm{m},R)$. Далее, поскольку $x(\cdot) = col\left(w(\cdot), \dfrac{dw(\cdot)}{dt} \right) : T \to R^{2n}$ образует частное решение системы $\dfrac{dx(t)}{dt} = A^0 x(t),\ t \in T$, то линейная независимость системы $\{x_i(\cdot): i=1,\dots,2n\}$ возможна лишь при условии цикличности пространства состояния R^{2n} относительно пары $(A^0,x(t_0))$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предмет настоящей работы состоял в проработке математического языка для выражения одной из самых (начиная с Ньютона) универсальных естественнонаучных идей - идеи спектра наблюдаемого электромагнитного явления. Как показала история этой идеи её важнейшим (центральным) положением является *принцип линейности малых приращений*, когда по существу всякая математическая операция в малом, - почти всегда линейна. Этот принцип лежит в основе всего математического анализа и его многочисленных приложений. К тому же после Эйнштейна стало ясным, что и окружающее физическое пространство приближенно линейно лишь в малой окрестности наблюдателя. К счастью, эта малая окрестность довольно велика, поэтому физика 20-го века существенно расширила сферу применения идеи линейности, добавив к принципу линейности малых приращений методологию *принципа суперпозиции* [13], постулирующего положение, когда функциональная зависимость выходных величин (траекторий) от входных воздействий (управления) суть *линейная*. Поэтому предложенная вниманию статья явилась развитием математических идей, изложенных в [3, 6, 13], и преследовала несколько как общих, так и вполне конкретных целей; к числу последних относятся:

- алгоритм проверки гипотезы о наличии структурных свойств *линейности* и *стационарности* у исследуемой непрерывной многомерной динамической системы, исходя из методов экспериментально наблюдаемых вектор-функций типа «*траектория*, *управление*»;
- решение задачи спектральной идентификации с индексом *n* для эллиптического оператора линейного диссипативного распределенного объекта.

Изложенные в статье математические идеи и методы могут быть аналитически расширены (с учетом результатов из [14-16] в следующих теоретико-прикладных направлениях:

- на алгоритмическое решение задачи спектральной идентификации с индексом *n* при «полном составе» наблюдаемых *K*-решений (т.е. *собственное + вынужденное*);
- на развитие теории реализации высших порядков в сепарабельном гильбертовом пространстве; в этом контексте имеется в виду симбиоз результатов работы с теоремой Хеллингера-Теплица [7] и теорией Какутани о распространении линейного оператора в унитарном пространстве;
- на анализ нелинейных систем, в частности, с билинейной структурой [17, 18] для уравнений состояний в гильбертовом пространстве.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дмитриев, А.В.* Идентификация динамических характеристик непрерывных линейных моделей в условиях полной параметрической неопределенности / А.В. Дмитриев, Э.И. Дружинин // Известия РАН. Теория и системы управления. – 1999. – № 3. – С. 44-52.
2. *Аниконов, Ю.Е.* Об аналитических методах в теории обратных задач для гиперболических уравнений / Ю.Е. Аниконов, М.В. Нещадим // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2011. – Т. 14. – № 1. – С. 27-39. – № 2. – С. 28-33.
3. *Дружинин, Э.И.* Построение структурно устойчивых моделей динамики больших космических конструкций по данным летных испытаний / Э.И. Дружинин // Доклады РАН. – 2017. – Т. 479. – № 3. – С. 285-288..

4. *Данеев, А.В.* К оптимизации базиса конфигурационного пространства идентифицированной нелинейной модели динамики крупногабаритной космической конструкции / А.В. Данеев, В.А. Русанов, М.В. Русанов, В.Н. Сизых // Известия Самарского научного центра РАН. – 2019. – Т. 21. – № 3. – С. 52-62.
5. *Уонэм, М.* Линейные многомерные системы управления / М. Уонэм. - М.: Наука, 1980. - 376 с.
6. *Rusanov, V.A.* A posteriori simulation of dynamic model of the elastic element of satellite-gyrostat / V.A. Rusanov, A.V. Banshchikov, A.V. Daneev, A.A. Vetrov, V.A. Voronov // Far East Journal of Mathematical Sciences. - 2017. - Vol. 101. - No. 9. - P. 2079-2094.
7. *Рудин, У.* Функциональный анализ / У. Рудин. – М.: Мир, 1975. – 448 с.
8. *Владимиров, В.С.* Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
9. *Канторович, Л.В.* Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: Наука, 1977. – 744 с.
10. *Хорн, Р.* Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 655 с.
11. *Колмогоров, А.Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1988. – 544 с.
12. *Гантмахер, Ф.Р.* Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
13. *Lakeyev, A.V.* On realization of the superposition principle for a finite bundle of integral curves of a second-order bilinear differential system / A.V. Lakeyev, V.A. Rusanov, A.V. Daneev, Yu.D. Aksenov // Advances in Differential Equations and Control Processes. – 2023. – Vol. 30. – No. 2. – P. 169-197.
14. *Данеев, А.В.* К апостериорному моделированию нестационарных гиперболических систем / А.В. Данеев, В.А. Русанов, М.В. Русанов, В.Н. Сизых // Известия Самарского научного центра РАН. - 2018. – Т. 20. – № 1. – С. 106-113.
15. *Rusanov, V.A.* Higher-order differential realization of polylinear- controlled dynamic processes in a Hilbert space / V.A. Rusanov, A.V. Daneev, A.V. Lakeyev, V.N. Sizykh // Advances in Differential Equations and Control Processes. – 2018. – Vol. 19. – No. 3. – P. 263-274.
16. *Мишин, С.Н.* Обобщение метода Лагранжа на случай линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными операторными коэффициентами в локально выпуклых пространствах / С.Н. Мишин // Математические заметки. – 2018. – Т. 103. – Вып. 1. – С. 75-91.
17. *Rusanov, V.A.* Differential realization of second-order bilinear system: A functional-geometric approach / V.A. Rusanov, R.A. Daneev, A.V. Lakeyev, Yu.E. Linke // Advances in Differential Equations and Control Processes. – 2018. – Vol. 19. – No. 3. – P. 303-321.
18. *Rusanov, V.A.* On the bilinear second order differential realization of a infinite-dimensional dynamical system: An approach based on extensions to M2-operator / V.A. Rusanov, A.V. Lakeyev, A.V. Banshchikov, A.V. Daneev // Fractal and Fractional. – 2023. Vol. 7. – No. 4. – P. 1-18.

TO APOSTERIOR MODELING OF THE SPECTRUM OF AN ELLIPTICAL OPERATOR OF A NORMAL-HYPERBOLIC SYSTEM

© 2024 R.A. Daneev[1], V.A. Rusanov[2]

[1] East Siberian Institute of the Ministry of Affairs of Russia, Irkutsk
[2] Institute of System Dynamics and Control Theory named after V.M. Matrosov, Irkutsk

The basic provisions underlying the algorithmic procedures for implementing Kalman-Mesarovich with equations of state in the class of linear stationary ordinary differential equations for modeling distributed controlled dynamic systems are determined. In this context, key approaches to solving problems of identifying the discrete spectrum of the elliptic operator of a modeled dissipative system of normal-hyperbolic type are interpreted.

Key words: dynamical system of normal-hyperbolic type, identification of the spectrum of an elliptic operator.

DOI: 10.37313/1990-5378-2024-26-3-122-129
EDN: ELWNLS

REFERENCES

1. *Dmitriev, A.V.* Identifikaciya dinamicheskih harakteristik nepreryvnyh linejnyh modelej v usloviyah polnoj parametricheskoj neopredelennosti / A.V. Dmitriev, E.I. Druzhinin // Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya. – 1999. – № 3. – S. 44-52.
2. *Anikonov, Yu.E.* Ob analiticheskih metodah v teorii obratnyh zadach dlya giperbolicheskih uravnenij / YU.E. Anikonov, M.V. Neshchadim // Sibirskij zhurnal industrial'noj matematiki. – 2011. – T. 14. – № 1. – S. 27-39. – № 2. – S. 28-33.
3. *Druzhinin, E.I.* Postroenie strukturno ustojchivyh modelej dinamiki bol'shih kosmicheskih konstrukcij po dannym letnyh ispytanij / E.I. Druzhinin // Doklady RAN. – 2017. – T. 479. – № 3. – S. 285-288..
4. *Daneev, A.V.* K optimizacii bazisa konfiguracionnogo prostranstva identificirovannoj nelinejnoj modeli dinamiki krupnogabaritnoj kosmicheskoj konstrukcii / A.V. Daneev, V.A. Rusanov, M.V. Rusanov, V.N. Sizyh // Izvestiya Samarskogo nauchnogo centra RAN. - 2019. – T. 21. – № 3. – S. 52-62.
5. Uonem, M. Linejnye mnogomernye sistemy upravleniya / M. Uonem. - M.: Nauka, 1980. - 376 s.
6. *Rusanov, V.A.* A posteriori simulation of dynamic

model of the elastic element of satellite-gyrostat / V.A. Rusanov, A.V. Banshchikov, A.V. Daneev, A.A. Vetrov, V.A. Voronov // Far East Journal of Mathematical Sciences. – 2017. – Vol. 101. – No. 9. – R. 2079-2094.
7. *Rudin, U.* Funkcional'nyj analiz / U. Rudin. – M.: Mir, 1975. – 448 s.
8. *Vladimirov, V.S.* Uravneniya matematicheskoj fiziki / V.S. Vladimirov. – M.: Nauka, 1981. – 512 s.
9. *Kantorovich, L.V.* Funkcional'nyj analiz / L.V. Kantorovich, G.P. Akilov. – M.: Nauka, 1977. – 744 c.
10. *Horn, R.* Matrichnyj analiz / R. Horn, CH. Dzhonson. – M.: Mir, 1989. – 655 s.
11. *Kolmogorov, A.N.* Elementy teorii funkcij i funkcional'nogo analiza / A.N. Kolmogorov, S.V. Fomin. – M.: Nauka, 1988. – 544 s.
12. *Gantmaher, F.R.* Teoriya matric / F.R. Gantmaher. – M.: Nauka, 1988. – 552 s.
13. *Lakeyev, A.V.* On realization of the superposition principle for a finite bundle of integral curves of a second-order bilinear differential system / A.V. Lakeyev, V.A. Rusanov, A.V. Daneev, Yu.D. Aksenov // Advances in Differential Equations and Control Processes. – 2023. – Vol. 30. – No. 2. – P. 169-197.
14. *Daneev, A.V.* K aposteriornomu modelirovaniyu nestacionarnyh giperbolicheskih sistem / A.V. Daneev, V.A. Rusanov, M.V. Rusanov, V.N. Sizyh // Izvestiya Samarskogo nauchnogo centra RAN. - 2018. – T. 20. – № 1. – S. 106-113.
15. *Rusanov, V.A.* Higher-order differential realization of polylinear- controlled dynamic processes in a Hilbert space / V.A. Rusanov, A.V. Daneev, A.V. Lakeyev, V.N. Sizykh // Advances in Differential Equations and Control Processes. – 2018. – Vol. 19. – No. 3. – P. 263-274.
16. *Mishin, S.N.* Obobshchenie metoda Lagranzha na sluchaj linejnyh differencial'nyh uravnenij vtorogo poryadka s postoyannymi operatornymi koefficientami v lokal'no vypuklyh prostranstvah / S.N. Mishin // Matematicheskie zametki. – 2018. – T. 103. – Vyp. 1. – S. 75-91.
17. *Rusanov, V.A.* Differential realization of second-order bilinear system: A functional-geometric approach / V.A. Rusanov, R.A. Daneev, A.V. Lakeyev, Yu.E. Linke // Advances in Differential Equations and Control Processes. – 2018. – Vol. 19. – No. 3. – P. 303-321.
18. *Rusanov, V.A.* On the bilinear second order differential realization of a infinite-dimensional dynamical system: An approach based on extensions to M2-operator / V.A. Rusanov, A.V. Lakeyev, A.V. Banshchikov, A.V. Daneev // Fractal and Fractional. – 2023. Vol. 7. – No. 4. – P. 1-18.

Roman Daneev, Candidate of Technics, Associate Professor of the Department of Information Technology.
E-mail: romasun@mail.ru.
Vyacheslav Rusanov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, senior researcher at the Institute of Dynamics and Control Theory named after V.M. Matrosov.
E-mail: v.rusanov@mail.ru